

ზოგიერთი შენიშვნა ბანახის სივრცეში წრფივი ოპერატორის უწყვეტად შებრუნებადობის შესახებ

ჯემალ როგავა

ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი, ი. ვეკუას სახელობის
გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტი

A წრფივ ოპერატორს X ბანახის სივრცეიდან X -ში ($A: X \rightarrow X$) უწოდებენ უწყვეტად შებრუნებადს, თუ ის ბიექციაა და მისი შებრუნებული A^{-1} შემოსაზღვრულია.

შენიშვნა 1. ვთქვათ A და B წრფივი ოპერატორებია X ბანახის სივრცეში, რომელთა განსაზღვრის არეები მკვერთია X -ში. ვთქვათ $D(A) \subset D(B)$ და ნებისმიერი u ვექტორისთვის $D(A)$ -დან მართებულია შემდეგი უტოლობები: (a) $\|Bu\| \leq c_0 \|Au\|$, (b) $\|Bu\| \leq c_1 \kappa^{-1} (1 - \kappa)^{-\alpha} \|(A + \kappa B)u\|$, სადაც $0 < \kappa < 1$, $0 \leq \alpha < 1$, c_0 და c_1 დადებითი მუდმივებია. მაშინ A ოპერატორი უწყვეტად შებრუნებადია, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $A + B$ უწყვეტად შებრუნებადია.

შენიშვნა 2. შენიშვნა 1 ძალაში დარჩება, თუ (b) პირობას შევცვლით შემდეგი პირობით: $\|Bu\| \leq q \|Au\| + \|(A + B)u\|$, $\forall u \in D(A) \subset D(B)$, სადაც $0 < q < 1$.

ამ შენიშვნიდან გამომდინარეობს შემდეგი ფაქტი.

შენიშვნა 3. ვთქვათ A და B წრფივი ოპერატორებია H ჰილბერტის სივრცეში, რომელთა განსაზღვრის არეები მკვერთია H -ში. ვთქვათ $D(A) \subset D(B)$ და ნებისმიერი u ვექტორისთვის $D(A)$ -დან მართებულია შენიშვნა 1-ის (a) პირობა და შემდეგი უტოლობა: $\operatorname{Re}(Au, Bu) \geq -q \|Au\|^2$, სადაც $0 < q < 1$. მაშინ A ოპერატორი უწყვეტად შებრუნებადია, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $A + B$ უწყვეტად შებრუნებადია.

შენიშვნა 4. თუ შენიშვნა 1-ში (b) პირობის ნაცვლად მოვითხოვთ შემდეგი უტოლობის შესრულებას: $\|Bu\| \leq q \|Au\| + c_2 \|(A + B)u\|$, $\forall u \in D(A) \subset D(B)$, სადაც $0 < q < 1$, $c_2 = \operatorname{const} > 0$, მაშინ A -ს უწყვეტად შებრუნებადობიდან გამომდინარეობს $S = A + B$ ოპერატორის უწყვეტად შებრუნებადობა, თუ $\overline{R(S)} = X$ და პირიქით, S -ს უწყვეტად შებრუნებადობიდან გამომდინარეობს A -ს უწყვეტად შებრუნებადობა, თუ $\overline{R(A)} = X$.

Some remarks on continuous invertibility of a linear operator in a Banach space

Jemal Rogava

Ivane Javakhishvili Tbilisi State University, Ilia Vekua Institute of Applied Mathematics

A linear operator A from a Banach space X to X ($A: X \rightarrow X$) is called continuously invertible if it is a bijection and its inverse A^{-1} is bounded.

Remark 1. Let A and B be linear operators in a Banach space X whose domains are dense in X . Suppose that $D(A) \subset D(B)$, and for any vector u in $D(A)$ the following inequalities hold: (a) $\|Bu\| \leq c_0 \|Au\|$, (b) $\|Bu\| \leq c_1 \kappa^{-1} (1 - \kappa)^{-\alpha} \|(A + \kappa B)u\|$, where $0 < \kappa < 1$, $0 \leq \alpha < 1$, c_0 and c_1 are positive constants. Then, operator A is continuously invertible if and only if $A + B$ is continuously invertible.

Remark 2. Remark 1 remains valid if condition (b) is replaced by the following condition: $\|Bu\| \leq q \|Au\| + \|(A + B)u\|$, $\forall u \in D(A) \subset D(B)$, where $0 < q < 1$.

Remark 3. Let A and B be linear operators in a Hilbert space H whose domains are dense in H . Suppose that $D(A) \subset D(B)$ and for any vector u in $D(A)$ condition (a) of Remark 1 and the following inequality are satisfied: $\operatorname{Re}(Au, Bu) \geq -q \|Au\|^2$, where $0 < q < 1$. Then, operator A is continuously invertible if and only if $A + B$ is continuously invertible.

Remark 4. If, instead of condition (b) in Remark 1, we require the inequality $\|Bu\| \leq q \|Au\| + c_2 \|(A + B)u\|$, $\forall u \in D(A) \subset D(B)$, where $0 < q < 1$, $c_2 = \text{const} > 0$, then continuous invertibility of the operator A implies continuous invertibility of the operator $S = A + B$ if $\overline{R(S)} = X$, and vice versa, continuous invertibility of the operator S implies continuous invertibility of the operator A if $\overline{R(A)} = X$.