ტოლერანტობის მიმართებაზე დაფუძნებული მეთოდები მიახლოებითი მსჯელობისთვის (FR-21-16725)

თემურ კუცია   მიხეილ რუხაია   მირჩა მარინი

სამეცნიერო ანგარიში

Abstract

In human communication, reasoning based on incomplete or imperfect information is very common. Modeling such reasoning is a highly nontrivial task and remains a significant challenge in artificial intelligence applications. In this field, many concepts traditionally defined by exact equality or equivalence are instead expressed through approximations. Typically, these approximations are provided in a quantitative form. Tolerance relations are one of the means for expressing such approximations. They are used to model imprecise information and are reflexive and symmetric but not necessarily transitive. These relations capture notions of closeness or similarity. The original idea behind them dates back to Poincaré, who considered the concept of tolerance fundamental in distinguishing mathematics applied to the physical world from ideal mathematics.

The fuzzy (quantitative) variant of tolerance relations is often referred to as a proximity relation, while a special case of it, fuzzy equivalence, is known as a similarity relation. The goal of this project was to develop automated reasoning methods for such quantitative relations. The methods we developed address the three main activities of mathematical reasoning: solving, computing, and deduction. Specifically, we designed algorithms for different variants of proximity and similarity relations that solve problems of quantitative unification, matching, and generalization in both crisp and fuzzy settings. These algorithms have been applied to develop methods for constrained rewriting, simplification, and inference, which are integrated into a framework of quantitative RhoLog calculus.

რეზიუმე

ადამიანებს შორის კომუნიკაციისას ძალიან ხშირია არასრულ, არასრულყოფილ ინფორმაციაზე მსჯელობა. ასეთი მსჯელობის მოდელირება ერთობ არატრივიალური ამოცანაა და მნიშვნელოვან პრობლემად რჩება ხელოვნური ინტელექტის გამოყენებაში. მოდელირებისას ამ სფეროში შემავალი ბევრი საკითხისთვის ზუსტი ტოლობა ან ეკვივალენტობა იცვლება მათი მიახლოებით. როგორც წესი, ეს მიახლოებები გარკვეული რაოდენობრივი სახით მოიცემა. ტოლერანტობის მიმართებები ასეთი მიახლოების გამოხატვის საშუალებათაგანია. ისინი შესაბამისი არაზუსტი ინფორმაციის მოდელირებისთვის გამოყენება. ესენია რეფლექსური და სიმეტრიული, მაგრამ არა აუცილებლად ტრანზიტული მიმართებები, რომლებიც გამოხატავენ სიახლოვის ან მსგავსების ცნებებს. მათთან დაკავშირებული თავდაპირველი იდეა ეკუთვნის პუანკარეს, რომელიც ტოლერანტობის ცნებას ფუნდამენტურ მნიშვნელობას ანიჭებდა ფიზიკურ სამყაროში გამოყენებული მათემატიკის იდეალური მათემატიკისგან გარჩევაში.

ტოლერანტობის ცნების არამკაფიო (რაოდენობრივ) ვარიანტს ხშირად სიახლოვის მიმართებად მოიხსენიებენ, ხოლო მისი სპეციალური შემთხვევა, არამკაფიო ეკვივალენტობა, მსგავსების მიმართების სახელითაა ცნობილი. ამ პროექტის მიზანი იყო ასეთი რაოდენობრივი მიმართებებისთვის ავტომატური მსჯელობის მეთოდების განვითარება. მეთოდები, რომელიც შევიმუშავეთ, შეეხება მათემატიკური მსჯელობის სამ უმთავრეს აქტივობას: ამოხსნის, გამოთვლის და დედუქციის აქტივობებს. კერძოდ, შეიქმნა ალგორითმები სიახლოვისა და მსგავსების მიმართებების ვარიანტებისთვის, რომლებიც ხსნიან რაოდენობრივი უნიფიკაციის, შეთანადების, და განზოგადების პრობლემებს მკაფიო და არამკაფიო სიმრავლეების მიმართ. ეს ალგორითმები გამოყენებულია შეზღუდვებიანი გადაწერის, გამარტივების და გამოყვანის მეთოდების შესაქმნელად, რაც გაერთიანებულია ისეთ ჩარჩო-სტრუქტურაში, როგორიცაა რაოდენობრივი როლოგ-აღრიცხვა.

1 შესავალი

ადამიანებს შორის კომუნიკაციისას ძალიან ხშირია არასრულ, არასრულყოფილ ინფორმაციაზე მსჯელობა. მისი მოდელირება ერთობ არატრივიალური ამოცანაა და კვლავ რჩება მნიშვნელოვან საკითხად ხელოვნური ინტელექტის გამოყენებაში. ასეთ ინფორმაციასთან ასოცირდება სხვადასხვა ცნება (მაგ., გაურკვევლობა, არასიზუსტე, ბუნდოვანება, არამკაფიოობა) და მათთან გამკლავებისთვის შემოთავაზებულია სხვადასხვა მეთოდოლოგია (მაგ., მიდგომები დაფუძნებული ნაგულისხმევ ლოგიკაზე, ალბათობაზე, არამკაფიო სიმრავლეებზე, რაოდენობრივ ალგებრებზე, კვანტალებზე და ა.შ.)

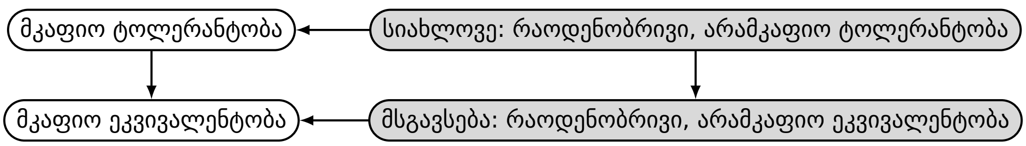
ამ სფეროში მრავალი პრობლემისთვის ზუსტი ტოლობა იცვლება მისი მიახლოებით. შესაბამისად, ზუსტი თეორიებიდან ფოკუსი გადადის მიახლოებების თეორიებზე. როგორც წესი, ეს მიახლოებები გარკვეული რაოდენობრივი სახით მოიცემა. ტოლერანტობის მიმართება წარმოადგენს მიახლოების გამოხატვის საშუალებას შესაბამისი არაზუსტი ინფორმაციის მოდელირებით. ესენია რეფლექსური და სიმეტრიული, მაგრამ არა აუცილებლად ტრანზიტული მიმართებები, რომლებიც გამოხატავენ სიახლოვის ან მსგავსების იდეას. მაგალითები მოიცავს ბევრ ცნობილ მათემატიკურ ცნებას, როგორიცაა, მაგალითად, მიმართებები არაორიენტირებულ გრაფში ერთი და იმავე წიბოს წვეროებს შორის; მეტრული სივრცის ორ წერტილს შორის, რომელთა შორის მანძილი რაღაც ფიქსირებულ სიდიდეს არ აღემატება; ტოპოლოგიური სივრცის ორ წერტილს შორის, რომელიც ამ სივრცის მოცემული დაფარვის ერთსა და იმავე ელემენტს ეკუთვნიან და ა.შ.

ტერმინი "ტოლერანტობის მიმართება" პირველად შემოიტანა ზეემანმა [4], რომლის კვლევებიც ტოლერანტობის სივრცეებზე ემყარებოდა მათ გამოყენებას ტვინისა და ვიზუალური პერსპექტივის აღწერისას. თავდაპირველი იდეა ეკუთვნის პუანკარეს, რომელმაც 1890-იან წლებში რამდენიმე პუბლიკაციაში ჩამოაყალიბა თავისი შეხედულება ფიზიკურ კონტინუუმებთან დაკავშირებით (მაგ., [2]). ამ შეხედულებით, ტოლერანტობას ფუნდამენტური მნიშვნელობა აქვს ფიზიკურ სამყაროში გამოყენებული მათემატიკის იდეალური მათემატიკისგან გარჩევაში. ტოლერანტობის სივრცის თეორია შესწავლილია სხვადასხვა თვალსაზრისით (მაგალითად, ტოპოლოგია ან კატეგორიის თეორია). ზოგიერთი თანამედროვე გამოყენება მოიცავს, მაგალითად, ინფორმაციულ სისტემებს, გრანულირებულ გამოთვლებს და გამოსახულების ანალიზს. თავდაპირველ ვერსიაში ტოლერანტობის მიმართება იყო მკაფიო (მაგალითად, ორი ობიექტი ერთმანეთთან ახლოს არის ან არა). მოგვიანებით გამოჩნდნენ მათი რიცხობრივი ვარიაციები, რამაც სხვა ვერსიებთან ერთად, მიგვიყვანა ტოლერანტობის მიმართებამდე არამკაფიო გარემოში [1]. ბინარული არაკაფიო მიმართება მოცემულ სიმრავლეზე არის ფუნ-

ქცია ამ სიმრავლის ელემენტების წყვილების სიმრავლიდან ნამდვილი რიცხვების $[0,1]$ ინტერვალში. $\mathcal{R}$ არამკაფიო მიმართებას S სიმრავლეზე ეწოდება *სიახლოვის მიმართება* (ასევე ცნობილია როგორც *არამკაფიო ტოლერანტული მიმართება*) S-ზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ თუ ის არის რეფლექსური ($\mathcal{R}(s,s) = 1$ ყოველი $s \in S$-თვის) და სიმეტრიული ($\mathcal{R}(s_1,s_2) = \mathcal{R}(s_2,s_1)$ ყოველი $s_1, s_2 \in S$-თვის). სიახლოვის მიმართების კერძო შემთხვევაა მსგავსების მიმართება, სადაც T-ნორმაზე დამოკიდებული ტრანზიტულობის თვისების ვარიანტი კმაყოფილდება: $\mathcal{R}(s_1,s_2) \geq \mathcal{R}(s_1,s) \wedge \mathcal{R}(s,s_2)$ ყოველი $s_1, s_2, s \in S$-თვის, სადაც $\wedge$ T-ნორმას აღნიშნავს. ეს ცნებები არამკაფიო სიმრავლეებიდან ზოგადდება უფრო აბსტრაქტულ, კვანტალების დონეზე [3], სადაც არამკაფიო კვანტალი მიეკუთვნება ე.წ. ლოუვერეანული კვანტალების კლასს.

წლების განმავლობაში დიდი პროგრესი შეინიშნებოდა ტოლერანტობის სივრცეების თეორიისა და მათი გამოყენების გამოკვლევაში, მაგრამ შესაბამისი ავტომატიზაციის ტექნიკების კვლევას შედარებით ნაკლები ყურადღება ეთმობოდა, განსაკუთრებით ტერმებზე რაოდენობრივი მიმართების არსებობისას. გარკვეულწილად, ეს პრობლემა მიეწერება ძირითადი გამოთვლითი მექანიზმის სირთულეს, რომელიც გვხვდება მსჯელობის დროს. ეს მექანიზმია რაოდენობრივი შეზღუდვების სიმბოლური ამოხსნა (უნიფიკაცია, შეთანადება, განზოგადება და სხვ.), რომლის სირთულის ერთ-ერთი (მაგრამ არა ერთადერთი) წყარო უკავშირდება ტოლობის პრედიკატის რაოდენობრივ მიახლოებებს. არამკაფიო თეორიებში ეს პრობლემა შეეხება არა მხოლოდ სიახლოვის მიმართებებს, არამედ მსგავსების რამდენიმე მიმართების კომბინაციასაც.

მკაფიო ტოლერანტობის და ეკვივალენტობის მიმართებებს და მათ რაოდენობრივ / არამკაფიო ანალოგებს შორის ურთიერთდამოკიდებულების ილუსტრაცია შეგვიძლია სქემით, სადაც ისარი უფრო ზოგადიდან უფრო სპეციფიკურისკენ მიდის:



ჩვენი კვლევა, ძირითადად, შეეხებოდა რაოდენობრივი შეზღუდვების სიმბოლური ამოხსნის მეთოდებს და მათ გამოყენებებს (დიაგრამის ნაცრისფერი მხარე), ვინაიდან, როგორც დიაგრამიდანაც ჩანს, ეს გაცილებით ზოგადი შემთხვევაა და ტექნიკები, რომლებიც შემუშავებულია რაოდენობრივი ტოლერანტობისა და ეკვივალენტურობისთვის, შეიძლება გამოყენებულ იქნას მათი მკაფიო ვერსიების მიმართაც (რომელთა მიღებაც შესაძლებელია რაოდენობრივი მიმართების სპეციალური კვეთით). თუმცა, ასევე დავამუშავეთ ზოგი ტექნიკის (განსაკუთრებით, განზოგადების მეთოდების) მკაფიო ვერსიები ფონური თეორებისთვის.

2 კვლევის მეთოდები

პროექტში განხორციელებული კვლევისთვის გამოყენებულ იქნა სტანდარტული მეთოდოლოგია, რომელიც დაფუძნებულია პრობლემის გადასაჭრელად სპეციფიკური პროცედურების შემუშავებაზე, ანალიზზე და იმპლემენტაციაზე სიახლოვისა და მსგავსების მიმართებების თეორიებში. ფუნდამენტური პრობლემა შეეხება შეზღუდვების ამოხსნას, როგორიცაა უნიფიკაციის, შეთანადების, განზოგადების შეზღუდვები და მათი სპეციალური ვარიანტები როგორც არამკაფიო, ისე მკაფიო შემთხვევებისთვის. ამ ნაწილისთვის შემუშავებული ტექნიკა შემდეგ გამოიყენება გამოთვლისა და დამტკიცების აქტივობებისთვის.

შეზღუდვების ამოხსნის, გადაწერა/გამოთვლის და გამოყვანის ალგორითმების შექმნის, შესწავლის და იმპლემენტაციის მეთოდები, რასაც ამ პროექტში ვიყენებდით, საფუძველს იღებს მათემატიკის, ლოგიკის და კომპიუტერული მეცნიერების სხვადასხვა ქვედარგიდან, როგორიცაა, მაგალითად:

- უნიფიკაციის თეორია და შეზღუდვათა ამოხსნის მეთოდები ალგებრულ სტრუქტურებში,
- T-ნორმაზე დაფუძნებული არამკაფიო ლოგიკები და არამკაფიო სიმრავლეთა თეორია,
- კვანტალების თეორია, რაოდენობრივი ეკვაციონალური თეორიები და რაოდენობრივი გადაწერა,
- ლამბდა-აღრიცხვა და მაღალი რიგის თეორიები,
- ალგორითმების შექმნა, ანალიზი (გაჩერებადობა, სისრულე, სისწორე), იმპლემენტაცია,
- ტერმთა გადაწერა, წესებზე დაფუძნებული პროგრამირება,
- კომპიუტერული ლოგიკა, ლოგიკური პროგრამირება.

3 კვლევის შედეგების განხილვა

პროექტის ფარგლებში ჩატარებულმა კვლევებმა რამდენიმე მიმართულება მოიცვა. მიღებული შედეგები საინტერესოა არა მხოლოდ იმ თვალსაზრისით, რომ წყვეტენ არსებულ საკვლევ პრობლემებში ჩამოყალიბებულ ფუნდამენტურ საკითხებს, არამედ იმითაც, რომ წამოჭრიან ახალ პრობლემატიკას და ამით გზას უხსნიან მომავალ საკვლევ სამუშაოებს პროექტის თემატიკასთან დაკავშირებულ საკითხებში.

მთავარი პრობლემა, რომლის გადაჭრაზეც ამ პროექტში ვმუშაობდით, იყო სხვადასხვა სახის შეზღუდვების ამოხსნების მეთოდები რაოდენობრივ თეორიებში თუ მათ მკაფიო ანალოგებში. ერთ-ერთი ასეთი პრობლემა, რაც განვიხილეთ, შეეხებოდა არამკაფიო შეთანადების ამოხსნას სიახლოვის (და კერძო შემთხვევაში, მსგავსების) მიმართების იმ შემთხვევებისთვის, როცა T-ნორმა განზოგადებულია სპეციფიკური, გიოდელის T-ნორმიდან უფრო ზოგადი კლასისთვის, რაც მოიცავს მარცხნიდან უწყვეტ T-ნორმებს. მთავარი სირთულე, რაც ამ განზოგადებას უკავშირდება, არის ის, რომ T-ნორმის იდემპოტენტურობა გარანტირებული არაა და ამიტომ გიოდელის T-ნორმისთვის ჩამოყალიბებული ალგორითმი ზოგადი შემთხვევისთვის გამოუსადეგარია. ამის გამო საჭირო გახდა ახალი, უფრო ზოგადი ალგორითმის შემუშავება (რაც კერძო შემთხვევაში ვარგისია გიოდელის T-ნორმისთვისაც), მისი თვისებების შესწავლა და იმპლემენტაცია. მოცემული ე.წ. ზღურბლის მნიშვნელობისთვის ალგორითმი ითვლის შეთანადების პრობლემის ყველა ამონახსნს, რომლის სიზუსტის ხარისხი ამ ზღურბლის მნიშვნელობაზე ნაკლები არაა. ქვევით მოყვანილი მაგალითი ალგორითმის იმპლემენტაციის (პროლოგ-პროგრამის) სესიიდანაა აღებული. ლოგიკური ენა, რისთვისაც ეს ალგორითმი შემუშავდა, საკმაოდ გამომსახველობითია და შეიცავს ოთხი ტიპის ცვლადს: ინდივიდუალური ტერმებისთვის, ტერმთა მიმდევრობისთვის, ფუნქციონალური სიმბოლოებისთვის, და კონტექსტებისთვის. (ამ სისტემის უკვე არსებული სიახლოვის მიმართების ამოხსნის ალგორითმი განზოგადდა ახალი T-ნორმებისთვის.)

მაგალითი 1. სიახლოვის მოცემული მიმართება:

```
proxrel(g1, h1, 0.4).
proxrel(g2, h1, 0.4).
proxrel(g1, h2, 0.5).
proxrel(g2, h2, 0.5).
proxrel(g2, h3, 0.6).
proxrel(g3, h3, 0.6).
proxrel(a, b, 0.7).
```

ინტერაქცია პროგრამასთან:[1]

```
?- match_prox_test(f(s_X), f(a,b), 0.4, goedel, Degree, Solution).
Degree = 1,
Solution = [s_X--->(a,b)] ;
Degree = 0.7,
Solution = [s_X--->(a,a)] ;
Degree = 0.7,
Solution = [s_X--->(b,b)] ;
Degree = 0.7,
Solution = [s_X--->(b,a)]


?- match_prox_test(f(s_X), f(a,b), 0.4, product, Degree, Solution).
Degree = 1,
Solution = [s_X--->(a,b)] ;
Degree = 0.7,
Solution = [s_X--->(a,a)] ;
Degree = 0.7,
Solution = [s_X--->(b,b)] ;
Degree = 0.48999999999999994,
Solution = [s_X--->(b,a)]


?- match_prox_test(f(s_X), f(a,b), 0.4, lukasiewicz, Degree, Solution).
Degree = 1,
Solution = [s_X--->(a,b)] ;
Degree = 0.7,
Solution = [s_X--->(a,a)] ;
Degree = 0.7,
Solution = [s_X--->(b,b)]


?- match_prox_test(f(s_x, i_x, c_Y(i_x), s_z), f(g1(a), g2(b), f(g3(a))),
                   0.6, goedel, Degree, Solution).
Degree = 0.6,
Solution = [s_x--->g1(a),i_x--->h3(b),c_Y--->f(hole),s_z--->eps] ;
Degree = 0.6,
Solution = [s_x--->g1(a),i_x--->h3(a),c_Y--->f(hole),s_z--->eps] ;
Degree = 0.6,
```

[1] https://www.risc.jku.at/people/tkutsia/software/prholog-full-prox.zip, ფაილი solve-prox.pl.

```
Solution = [s_x--->g1(b),i_x--->h3(b),c_Y--->f(hole),s_z--->eps] ;
Degree = 0.6,
Solution = [s_x--->g1(b),i_x--->h3(a),c_Y--->f(hole),s_z--->eps]


?- match_prox_test(f(s_x, i_x, c_Y(i_x), s_z), f(g1(a), g2(b), f(g3(a))),
                   0.15, product, Degree, Solution).
Degree = 0.175,
Solution = [s_x--->eps,i_x--->h2(a),c_Y--->hole,s_z--->f(g3(a))] ;
Degree = 0.175,
Solution = [s_x--->eps,i_x--->h2(b),c_Y--->hole,s_z--->f(g3(a))] ;
Degree = 0.252,
Solution = [s_x--->g1(a),i_x--->h3(b),c_Y--->f(hole),s_z--->eps] ;
Degree = 0.252,
Solution = [s_x--->g1(a),i_x--->h3(a),c_Y--->f(hole),s_z--->eps] ;
Degree = 0.17639999999999997,
Solution = [s_x--->g1(b),i_x--->h3(b),c_Y--->f(hole),s_z--->eps] ;
Degree = 0.17639999999999997,
Solution = [s_x--->g1(b),i_x--->h3(a),c_Y--->f(hole),s_z--->eps]
```

ამ ალგორითმის ინტეგრირებამ პირობებიანი გადაწერის აღრიცხვაში (სადაც სხვა შეზღუდვებიცაა განხილული, მათ შორის რეგულარულ ხეთა წევრობის) მოგვცა ახალი, გაფართოებული აღრიცხვა, რომელიც სიახლოვის მიმართების თეორიებში ერთდროულად ასრულებს გამოთვლა/გამარტივების და დედუქციის მექანიზმის ფუნქციებს ეგრეთ წოდებული well-moded კლაუზებზე წრფივი რეზოლუციის გამოყვანის სისტემის მოქმედებით.

საინტერესო ქვეპრობლემა, რაც ამ ალგორითმზე მუშაობის დროს წარმოიშვა, უკავშირდება პრობლემისა და მისი ამონახსნის კომპაქტური, ოპტიმალური სახით წარმოდგენას. პრობლემის ასეთი წარმოდგენისთვის შემოვიღეთ ეგრეთ წოდებული გაფართოებული ტერმები, რამაც საშუალება მოგვცა ის გამოსახულებები, რაზეც ალგორითმი მუშაობს, ექსპონენტურად შეგვეკუმშა. ამონახსნების კომპაქტურად წარმოსადგენად ამონახსნთა სიმრავლეში შემოვიღეთ საზღვრის ცნება, რაც აცალკევებს ამონახსნთა სიმრავლეს არაამონახსნებიდან. ეს საშუალებას იძლევა შეთანადების პრობლემის ამონახსნთა სიმრავლე კომპაქტური სახით წარმოვადგინოთ იმ შემთხვევისთვის, როცა თითოეული ამონახსნის ცხადად ჩამოთვლა აუცილებელი არაა. როდესაც შეთანადების ალგორითმი იძლევა კომპაქტური ამონახსნის ვარიანტს მასში შემავალი თითოეული პარამეტრისთვის, საბოლოო ამონახსნის მისაღებად საჭიროა თითოეული ამ ვარიანტიდან ავირჩიოთ ისეთი მნიშვნელობა, რომ მათი კომბინაცია გვაძლევდეს მინიმალურ დასაშვებ მნიშვნელობებს ამონახსნის ხარისხისთვის. ეს მინიმალური მნიშვნელობები იძლევიან საზღვარს ამონახსნებსა და არაამონახსნებს შორის. საზოგადოდ, ასეთი საზღვარი ერთადერთი არაა. საზღვართა დადგენის პრობლემა საკმაოდ საინტერესო გამოდგა და იგი აბსტრაქტული სახით განცალკევებულად შევისწავლეთ უფრო ზოგად რაოდენობრივ თეორიებში, რაც კვანტალებით აღიწერება. მოცემული კვანტალის $\otimes$ ტენზორისთვის და λ ზღვრული მნიშვნელობისთვის, კარგი n-ეული ვუწოდეთ კვანტალის ელემენტთა ისეთ $(s_1, \ldots, s_n)$ n-ეულს, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას $s_1 \otimes \cdots \otimes s_n \geq \lambda$. ასეთ n-ეულებს ლექსიკოგრაფიკულად ვადარებთ ერთმანეთს. საზღვრის დადგენის პრობლემაში, რომელიც შემდეგნაირად ყალიბდება: მოცემული n ცალი დალაგებული სასრული მიმდევრობისთვის ავირჩიოთ ისეთი მინიმალური კარგი n-ეული, რომელშიც თითო მიმდევრობიდან თითო ელემენტი შედის. ასეთი n-ეულების სიმრავლე იძლევა ბაზისს ამონახსნთა სივრცეში. რადგან მათი რაოდენობა შეიძლე-

ბა ექსპონენტურად ბევრი იყოს, მათი გამოთვლის ეფექტური მეთოდის იმედი არ უნდა გვქონდეს, მაგრამ პრაქტიკულად გამოსაყენებელი ევრისტიკების შემოტანით შევიმუშავეთ და იმპლემენტაცია გავუკეთეთ ალგორითმს, რომელიც გარკვეულ პრაქტიკულ შემთხვევებში კარგ შედეგებს იძლევა.

მაგალითი 2. ინტერაქცია პროგრამასთან.[2] შვიდი დალაგებული მიმდევრობიდან (რაც შეესაბამება რაოდენობრივი შეთანადების პრობლემის ამონახსნის დასაშვებ ხარისხებს შვიდი სხვადასხვა პარამეტრისთვის) ვირჩევთ ისეთ მინიმალურ შვიდეულებს, რომელთა ტენზორული პროდუქტი (ამ კონკრეტულ შემთხვევაში ნამრავლი) აღემატება (ან უდრის) ზღვრულ მნიშვნელობას 0.3-ს.

```
?- random_input_formatted_output(7, 7, prod, 0.3, true, true).

-------------------------------------------------------
Random problem. Rows: 7, Columns: 7.
Tensor = prod,  Threshold = 0.3.

Raw input (but with duplicates removed, if any):
[ 0.14,  0.15,  0.59,   0.6,  0.81,  0.88,  0.92 ]
[ 0.28,  0.45,  0.72,  0.74,   0.8,  0.82,  0.85 ]
[ 0.16,  0.29,   0.3,  0.52,  0.63,  0.76,  0.96 ]
[ 0.02,  0.06,  0.45,  0.52,  0.73,  0.91 ]
[ 0.23,   0.3,  0.38,  0.41,  0.54,  0.66,  0.93 ]
[ 0.05,  0.19,  0.22,  0.24,  0.37,  0.55,  0.86 ]
[    0,  0.32,  0.42,  0.45,  0.69,  0.71,  0.85 ]

Cleaned input (only numbers  threshold are retained):
[ 0.59,   0.6,  0.81,  0.88,  0.92 ]
[ 0.45,  0.72,  0.74,   0.8,  0.82,  0.85 ]
[  0.3,  0.52,  0.63,  0.76,  0.96 ]
[ 0.45,  0.52,  0.73,  0.91 ]
[  0.3,  0.38,  0.41,  0.54,  0.66,  0.93 ]
[ 0.37,  0.55,  0.86 ]
[ 0.32,  0.42,  0.45,  0.69,  0.71,  0.85 ]

-------------------------------------------------------
Number of good tuples: 77
% 16,161 inferences, 0.003 CPU in 0.003 seconds (98% CPU, 5962127 Lips)

The length of the basis is 15.
Output: basis elements with the corresponding values:

[ 0.92,  0.85,  0.96,  0.73,  0.93,  0.86,  0.69 ]    0.3024
[ 0.92,  0.85,  0.76,  0.91,  0.93,  0.86,  0.71 ]    0.3071
[ 0.92,  0.85,  0.63,  0.91,  0.93,  0.86,  0.85 ]    0.3048
[ 0.92,  0.82,  0.96,  0.73,  0.93,  0.86,  0.71 ]    0.3002
[ 0.92,   0.8,  0.96,  0.91,  0.66,  0.86,  0.85 ]    0.3102
[ 0.92,  0.72,  0.76,  0.91,  0.93,  0.86,  0.85 ]    0.3114
[ 0.88,  0.82,  0.96,  0.91,  0.66,  0.86,  0.85 ]    0.3041
```

[2] https://www.risc.jku.at/people/tkutsia/software/basis.zip

```
[ 0.88,  0.74,  0.76,  0.91,  0.93,  0.86,  0.85 ]    0.3062
[ 0.88,  0.72,  0.96,  0.91,  0.93,  0.86,  0.69 ]    0.3055
[ 0.88,  0.72,  0.96,  0.73,  0.93,  0.86,  0.85 ]    0.3019
[ 0.81,   0.8,  0.96,  0.91,  0.93,  0.86,  0.69 ]    0.3124
[ 0.81,   0.8,  0.96,  0.73,  0.93,  0.86,  0.85 ]    0.3087
[ 0.81,   0.8,  0.76,  0.91,  0.93,  0.86,  0.85 ]    0.3047
[ 0.81,  0.72,  0.96,  0.91,  0.93,  0.86,  0.85 ]    0.3464
[  0.6,  0.85,  0.96,  0.91,  0.93,  0.86,  0.85 ]    0.3029

-------------------------------------------------------
true.
```

არამკაფიო რაოდენობრივი შეზღუდვების ამოხსნის კიდევ ერთი პრობლემა, რაც ამ პროექტში განვიხილეთ, შეეხებოდა მაღალი რიგის თეორიებში მსგავსების მიმართების გათვალისწინებით თარგების უნიფიცირებას. მიღებული ალგორითმი აზოგადებს ერთი მხრივ, მილერის და ნიპკოვის თარგების უნიფიკაციის კლასიკურ ალგორითმებს მარტივად ტიპირებულ ლამბდა-აღრიცხვაში (მსგავსების მიმართების დამატებით) და მეორე მხრივ, სესას პირველი რიგის არამკაფიო უნიფიკაციის ალგორითმს (მაღალი რიგის თეორიაზე გადასვლით). ვაჩვენეთ ალგორითმის გაჩერებადობა, სისწორე და სისრულე. გიოდელის T-ნორმისთვის ალგორითმი უნიფიცირებადი ტერმებისთვის აბრუნებს მათ უზოგადეს უნიფიკატორს საუკეთესო ხარისხით. არაიდემპოტენტური T-ნორმებისთვის ამონახსნი, ზოგადად, ერთადერთი შეიძლება არ იყოს.

გარდა შეზღუდვების ამოხსნისა არამკაფიო რაოდენობრივ კლასიკურ შემთხვევაში, შევისწავლეთ ასევე შეთანადების პრობლემა ე.წ. ფონური თეორიების (background theories) პირობებში. რაოდენობრივი ფონური თეორიები საკმაოდ კომპლექსური ფორმალიზმია, ჩვენი ალგორითმები მათში შეზღუდვების ამოხსნის პირველი ნაბიჯებია და გზას ხსნის უფრო რთული მეთოდების შესწავლისაკენ.

მაგალითი 3. დავუშვათ, ფონური თეორია მოცემულია შემდეგი სამი აქსიომით:

$$
\begin{aligned}
&f(x_1,x_2,x_3,x_4) \simeq_{0.7\otimes\mathfrak{d}_1\otimes\mathfrak{d}_2\otimes\mathfrak{d}_3} g(y_1,y_2,y_3,y_4,y_5) \Leftarrow \\
&\qquad x_2 \simeq_{\mathfrak{d}_1} y_1 \wedge x_4 \simeq_{\mathfrak{d}_2} y_2 \wedge x_4 \simeq_{\mathfrak{d}_3} y_4 \wedge && \text{(Def)}\\
&\qquad x_1 \simeq_{\mathfrak{g}_1} h(x_2,b) \wedge x_2 \simeq_{\mathfrak{g}_2} x_3 \wedge y_4 \simeq_{\mathfrak{g}_3} y_5 \wedge && \text{(Res)}\\
&\qquad \mathfrak{d}_1 \geq 0.4 \wedge \mathfrak{d}_2 \geq 0.5 \wedge \mathfrak{d}_3 \geq 0.6 \wedge \mathfrak{g}_1 = 1 \wedge 0.3 \leq \mathfrak{g}_2 \geq 0.7 \wedge \mathfrak{g}_3 \geq 0.4, && \text{(Deg)}
\end{aligned}
$$

$$a \simeq_{0.6} b, \qquad b \simeq_{0.7} c.$$

შეთანადების პრობლემას, რომლის ამოხსნაც გვსურს, აქვს სახე:

$$f(h(z_1,z_2),z_1,z_2,z_3) \precsim^{?}_{0.4} g(b,h(a,c),a,h(a,b),h(a,c)).$$

ჩვენი იმპლემენტაცია[3] გვაძლევს მის შემდეგ ამონახსნებს:

```
?- solve(f(h(Z1,Z2),Z1,Z2,Z3), g(b,h(a,c),a,h(a,b),h(a,c)), 0.4, Deg).
Z1 = a,
Z2 = b,
Z3 = h(a,c),
Deg = 0.6 ;
Z1 = a,
```

[3] https://www.risc.jku.at/people/tkutsia/software/mmpt.zip

```
Z2 = b,
Z3 = h(a,b),
Deg = 0.6 ;
Z1 = a,
Z2 = b,
Z3 = h(b,c),
Deg = 0.6 ;
Z1 = a,
Z2 = b,
Z3 = h(b,b),
Deg = 0.6 ;
Z1 = c,
Z2 = b,
Z3 = h(a,c),
Deg = 0.7 ;
Z1 = c,
Z2 = b,
Z3 = h(a,b),
Deg = 0.7 ;
Z1 = c,
Z2 = b,
Z3 = h(b,c),
Deg = 0.6 ;
Z1 = c,
Z2 = b,
Z3 = h(b,b),
Deg = 0.6
```

საინტერესო ფონური თეორიები განვიხილეთ მკაფიო შემთხვევებშიც, სადაც განსაკუთრებული ყურადღება დავუთმეთ ორ საკითხს: უნიფიკაციის და შეთანადების ალგორითმების ფორმალიზებას PVS-ის სისტემაში, სადაც ჩვენი ფორმალიზებული ალგორითმები ამ სისტემის ოფიციალურ ბიბლიოთეკაში ჩართეს[4] და განზოგადების პრობლემების შესწავლას. მოცემული ტერმების განზოგადება არის ტერმი, რომელის ეთანადება თითოეულ მოცემულ ტერმს. განზოგადების პრობლემები უნიფიკაციის პრობლემების დუალურია: მოცემული ტერმებისთვის უზოგადესი საერთო მაგალითის ნაცვლად, აქ უკერძოესი საერთო განზოგადების მოძებნაა საჭირო. ლოგიკური განზოგადების პრობლემებს და მათი ამოხსნის მეთოდებს დღესდღეობით ძალიან დიდი გამოყენება აქვთ სიმბოლური ხელოვნური ინტელექტის, პროგრამული კოდის ანალიზის, პროგრამების რეფაქტორიზაციის, პროგრამულ კოდში კლონების აღმოჩენის, ინდუქციური გამოყვანის, გამოსახულებათა სიმრავლის შეკუმშვა-ინდექსირების და სხვა მსგავს საკითხებში. ფონურ თეორიებში მათი შესწავლა გამოყენების ამ არეების გაფართოების კარგი საშუალებაა. მაგალითად, შთანთქმის (absorption) თეორია მოსახერხებელია პროგრამების ისეთი თვისების შესახებ სამსჯელოდ, როგორიცაა შეცდომით დამთავრება. ჩვენს კოლეგებთან ერთად შევიმუშავეთ ამ თეორიაში განზოგადების პრობლემის საკითხი, მისი ტიპი და შევიმუშავეთ ამოხსნის ალგორითმი.

რაოდენობრივი არამკაფიო განზოგადების პრობლემის ამოხსნის პროცესში წარმოიშვა საინტერესო ქვეპრობლემა. ვინაიდან სიახლოვის მიმართებები არამიმართუ-

[4] https://github.com/nasa/pvslib/tree/master/nominal

ლი გრაფების სახით შეიძლება წარმოდგეს, საჭირო გახდა ასეთ გრაფების დახლეჩა თანაუკვეთ კლიკებად (კვანძების ისეთ სიმრავლეებად, რომლების სრულ ქვეგრაფებს ქმნიან). თავად კლიკების გამოთვლისა და გრაფის კლიკებად დახლეჩის ალგორითმები კარგადაა ცნობილი, მაგრამ ჩვენი პრობლემის სპეციფიკა იყო ის, რომ ჯერ ერთი, გვჭირდებოდა ყველა შესაძლო დახლეჩის გამოთვლა და მეორე, გვინდოდა მაქსიმალურად ავრიდებოდით გამოთვლების გამეორებას ან უსარგებლო გამოთვლების ჩატარებას, რადგან ეს გამოთვლითი თვალსაზრისით საკმაოდ ძვირი ჯდება. ამიტომ ჩამოვაყალიბეთ, გავაანალიზეთ და იმპლემენტაცია გავუკეთეთ ალგორითმს, რომელიც ამ პრობლემას წყვეტს.[5]

რაოდენობრივი თეორიების საინტერესო და ძალიან პრაქტიკული რეალიზაციაა გადაწერის ლოგიკაზე დაფუძნებული სისტემის Maude-ს რეალური დროის ვერსია Real-Time Maude, სადაც რაოდენობრივი (მეტა-)ინფორმაცია დროის პარამეტრს ასახავს. პროექტის ფარგლებში ეს სისტემა გამოვიყენეთ ძალიან საინტერესო პრობლემისთვის: კიბერფიზიკური სისტემების საკოორდინაციო ენის Lingua Franca-ს დისკრეტული მოვლენების სემანტიკის ვერიფიკაციისთვის. ეს გახლდათ პირველი სავერიფიკაციო ფრეიმვორქი, რომელშიც Lingua Franca-ს სემანტიკის ვერიფიკაცია გახდა შესაძლებელი. ეს შრომა კიდევ ერთხელ ადასტურებს კლასიკური თეორიების (როგორიცაა, მაგ., გადაწერის ლოგიკა) რაოდენობრივი ანალოგების პრაქტიკულ მნიშვნელობას.

4 დასკვნები

პროექტში შევისწავლეთ ფუნდამენტური ამოცანები რაოდენობრივ თეორიებში მათემატიკური მსჯელობის სამი უმთავრეს აქტივობის: ამოხსნის, გამოთვლის და დედუქციის აქტივობებისთვის. ეს ამოცანები შეეხება როგორც არამკაფიო სიახლოვის და მსგავსების მიმართებებისთვის შეთანადების, უნიფიკაციის, განზოგადების პრობლემებს, ასევე მათ მკაფიო ანალოგებს ფონური თეორიებისთვის, შესაბამისი ალგორითმების შემუშავებას, ანალიზს, იმპლემენტაციას, და გამოყენებებს. მიღებული შედეგები გამოქვეყნდა შემდეგ სტატიებსა და პრეპრინტებში:

1. Mircea Marin, Temur Kutsia, Cleo Pau, Mikheil Rukhaia, Enumerating All Maximal Clique-Partitions of an Undirected Graph, H. Cheval, L. Leuş tean, A. Sipoş (Eds.): 7th Symposium on Working Formal Methods (FROM 2023), EPTCS 389, 2023, pp. 65–79, Open Publishing Association, 2023.
2. M. Ayala-Rincón, M. Fernández, G. Ferreira Silva, T. Kutsia, and D.Nantes-Sobrinho. Nominal AC-Matching. In: C. Dubois and M. Kerber, editors. Proceedings of CICM 2023 – 16th Conference on Intelligent Computer Mathematics. Volume 14101 of Lecture Notes in Artificial Intelligence. Springer, 2023, pp. 53–68.
3. T. Kutsia, M. Marin, M. Rukhaia. Similarity-based Set Matching. Preprint. Research Institute for Symbolic Computation (RISC), Johannes Kepler University Linz, Austria, 2023.
   `https://www.risc.jku.at/people/tkutsia/papers/set-similarity-matching.pdf`
4. M. Ayala-Rincón, M. Fernández, G. Ferreira Silva, T. Kutsia, D. Nantes-Sobrinho. Certified First-Order AC-Unification and Applications. Journal of Automated Reasoning 68(4): 25, 2024.

[5] https://staff.fmi.uvt.ro/~mircea.marin/software/MCP.html

5. M. Ayala-Rincón, D. Cerna, A. F. González Barragán, T. Kutsia. Equational Anti-unification over Absorption Theories. In: Ch. Benzmüller, M. J. H. Heule, R. A. Schmidt, editors. Proceedings of IJCAR 2024 - 12th International Joint Conference Automated Reasoning, Part. II. Volume 14740 of Lecture Notes in Artificial Intelligence. Springer, 2024. 317–337.
6. A. F. González Barragán, D. Cerna, M. Ayala-Rincón, and T. Kutsia. On Anti-Unification over Absorption, Associative, and Commutative Theories. S. Escobar and O. Fernández Gil, eds. 38th International Workshop on Unification, UNIF 2024, Nancy, France.
7. T. Kutsia and C. Pau. Matching Modulo Proximity Theories. Preprint. Research Institute for Symbolic Computation (RISC), Johannes Kepler University Linz, Austria, 2024. https://www.risc.jku.at/people/tkutsia/papers/fuzzy-matching-theories.pdf
8. B. Dundua, T. Kutsia. Higher-Order Pattern Unification Modulo Similarity Relations. Technical report no. 25-03 in RISC Report Series, Research Institute for Symbolic Computation (RISC), Johannes Kepler University Linz, Austria. ISSN 2791-4267. February 2025.
9. M. Marin, P.C. Ölveczky, M. Reja, M. Rukhaia, K. Bae. Semantics and Formal Analysis of Lingua Franca CPS Specifications in Rewriting Logic. In: Lee, E.A., Mousavi, M.R., Talcott, C. (eds) Rebeca for Actor Analysis in Action. Lecture Notes in Computer Science, vol 15560. Springer, Cham, 2025.

აღსანიშნია, რომ ამ შედეგებმა უკვე ჰპოვეს გამოყენება დასავლელი კოლეგების შრომებში, რასაც მოწმობს ზემოთ ჩამოთვლილი სტატიების ციტირებები. ეს კი მომავალი თანამშრომლობის საფუძველს ქმნის.

გარდა ამისა, პროექტის საკითხებზე დაიწერა ორი საბაკალავრო ნაშრომი ლინცის უნივერსიტეტში და შეიქმნა რამდენიმე პროგრამული პროდუქტი:

- პიროლოგ-სისტემის გაფართოება სიახლოვის მიმართების შეთანადების ალგორითმით მარცხნიდან უწყვეტი T-ნორმებისთვის;
- რაოდენობრივი შეთანადების პრობლემის კომპაქტურ ამონახსნთა სიმრავლეში ბაზისის გამოთვლის ალგორითმი;
- სიახლოვის მიმართებაზე დაფუძნებული რაოდენობრივი განზოგადების პრობლემის ამონახსნთა გამოთვლისთვის: არამიმართული გრაფების კლიკებად ყველა შესაძლო გზით დახლეჩის ალგორითმი;
- სიახლოვის მიმართებაზე დაფუძნებულ ფონურ თეორიებში შეთანადების პრობლემის ამოხსნის ალგორითმი.

პროექტის წევრებმა მონაწილეობა მიიღეს არაერთ საერთაშორისო სამეცნიერო ფორუმში მომხსენებლის, თანამომხსენებლის, პროგრამული კომიტეტის თავმჯდომარის ან წევრის რანგში და მიწვეულნი იყვნენ სათანამშრომლოდ ან მოხსენების წასაკითხად სხვადასხვა უნივერსიტეტში, მათ შორის:

- ავტომატური მსჯელობის საერთაშორისო გაერთიანებული კონფერენცია (IJCAR);
- ხელოვნური ინტელექტის საერთაშორისო გაერთიანებული კონფერენცია (IJCAI);
- საერთაშორისო კონფერენცია „გამოთვლადობა ევროპაში“ (CiE);
- მოქმედი ფორმალური მეთოდების სიმპოზიუმი (FROM);

- ინტელექტუალური კომპიუტერული მათემატიკის საერთაშორისო კონფერენცია (CICM);
- თეორემათა ინტერაქტიური მტკიცებების საერთაშორისო კონფერენცია (ITP);
- IFIP-ის სამუშაო ჯგუფის WG 1.6 შეხვედრა;
- თბილისის საერთაშორისო კონფერენცია „ენა, ლოგიკა, გამოთვლები“ (TbiLLC);
- საქართველოს მათემატიკოსთა კავშირის საერთაშორისო კონფერენცია;
- უნიფიკაციის საერთაშორისო ვორქშოფი (UNIF);
- საზაფხულო ვორქშოფი კომპიუტერულ ლოგიკაში (SWCL);
- ლინცის უნივერსიტეტი, ავსტრია;
- ბრაზილიის უნივერსიტეტი, ბრაზილია;
- ვალენსიის ტექნიკური უნივერსიტეტი, ესპანეთი;
- ოსლოს უნივერსიტეტი, ნორვეგია;
- INRIA/LORIA, ნანსი, საფრანგეთი;
- ჩეხეთის მეცნიერებათა აკადემიის კომპიუტერულ მეცნიერებათა ინსტიტუტი, პრაღა, ჩეხეთი.

5 სამომავლო რეკომენდაციები

რაოდენობრივი თეორიების შესწავლა ძალიან ინტენსიურად მიმდინარეობს მათი არაერთი საინტერესო გამოყენების გამო. განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია ბოლო წლებში გააქტიურებული მიმართულება, რაც მიზნად ისახავს სიმბოლური და რაოდენობრივი ტექნიკების ინტეგრირებას და ნეირო-სიმბოლური ხელოვნური ინტელექტის ამოცანებში მათ გამოყენებას. ჩვენს პროექტში ასეთი ინტეგრირების მაგალითებია რაოდენობრივი შეზღუდვებისთვის სიმბოლური ამოხსნის მეთოდების შემუშავება. ამ მიმართულებით კვლევები, შეიძლება ითქვას, რომ საწყის ეტაპზეა და უახლოეს წლებში მათი მრავალმხრივი განვითარებაა მოსალოდნელი. ეს ინტერდისციპლინური მიმართულებაა, სადაც მათემატიკის, კომპიუტერული მეცნიერებების, ლოგიკის, ხელოვნური ინტელექტის სხვადასახვა ქვედარგები ხვდებიან ერთმანეთს. იმედია, რომ ფონდი შეძლებისდაგვარად ხელს შეუწყობს საქართველოში ამ დარგში საერთაშორისო დონის კვლევების წარმოებას.

ლიტერატურა

[1] D. Dubois and H. Prade. *Fuzzy sets and systems: theory and applications*, volume 144 of *Mathematics in science and engineering*. Acad. Press, 1980.

[2] J. H. Poincaré. L’espace et la géomètrie. *Revue de métaphysique et de morale*, 3:631–646, 1895.

[3] K. I. Rosenthal. *Quantales and Their Applications*, volume 234 of *Pitman Research Notes in Mathematics Series*. Longman Scientific & Technical, Harlow, UK, 1990.

[4] E. C. Zeeman. The topology of the brain and visual perception. In *The Topology of 3-Manifolds*, pages 240–248. Prentice Hall, Englewood, N.J., 1962.