

სავარჯიშოები

1. გააწარმოეთ შემდეგი ფუნქციები

$$1.1. y = \frac{3x+8}{15};$$

$$1.2. y = \frac{2x}{1-x^2};$$

$$1.3. y = e^{e^x};$$

$$1.4. y = \sin^5 x;$$

$$1.5. y = \left(\frac{a}{b}\right)^x \left(\frac{x}{b}\right)^a, \quad a > 0, b > 0;$$

$$1.6. y = 4 \ln(x^2 + 1);$$

$$1.7. y = \frac{1}{1+x^4};$$

$$1.8. y = \cos(\cos x);$$

$$1.9. y = \sqrt{1+x^2};$$

$$1.10. y = x^x;$$

$$1.11. y = x^{\sin x}.$$

2. იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების ლოკალური ექსტრემუმები

$$2.1. y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 4;$$

$$2.2. y = x + \frac{1}{x};$$

$$2.3. y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1};$$

$$2.4. y = 4x - x^4;$$

$$2.5. y = 2\sqrt{x - x};$$

$$2.6. y = \frac{x}{x^2 + 4};$$

$$2.7. y = x \ln x.$$

3. იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების ზემოთ და ქვემოთ ამოზნექილობის შუალედები და გადაღუნვის წერტილები:

$$3.1. y = x^2 - 6x + 7;$$

$$3.2. y = -x^2 + 4x - 5;$$

$$3.3. y = x + \frac{1}{x};$$

$$3.4. y = x^2 - \frac{1}{x^2};$$

$$3.5. y = x^4 - 2x^2;$$

$$3.6. y = \frac{1}{x^2 + 1};$$

$$3.7. y = e^{-x^2}.$$

4. იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების გრაფიკების ასიმპტოტები:

$$4.1. y = \frac{1}{4-x^2};$$

$$4.2. y = \frac{x^2-1}{2x^2+5};$$

$$4.3. y = \frac{2}{3+4x};$$

$$4.4. y = x + \frac{2}{x-3};$$

$$4.5. y = x - \frac{7}{x};$$

$$4.6. y = \frac{3x^3}{x^2+16};$$

$$4.7. y = \sqrt{x^2-1};$$

$$4.8. y = xe^x.$$

5. შემდეგი ფუნქციები გამოიკვლიეთ დიფერენციალური მეთოდის გამოყენებით და ააგეთ მათი გრაფიკები:

5.1. $y = 2x^2 - 32$;

5.2. $y = 3x^3 - 27$;

5.3. $y = 5x^{1/2} + 25$;

5.4. $y = 4x + 16$;

5.5. $y = 8x^2 + 20$;

5.6. $y = x^2 - 25$;

5.7. $y = \frac{2}{x} - 1$;

5.8. $y = \frac{3}{x} + 1$;

5.9. $y = 2^x$;

5.10. $y = 0.5^x$;

5.11. $y = \log_3 x$;

5.12. $y = \log_{0.7} x$;

5.13. $y = x^4 + 4x^3 + 7$;

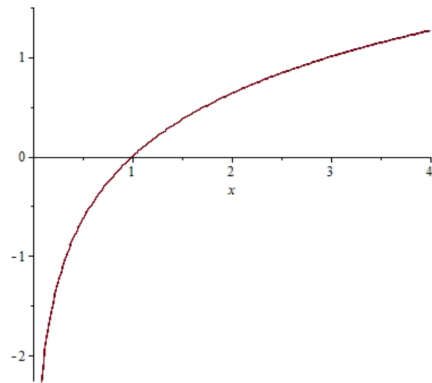
5.14. $y = \frac{x+1}{x-1}$;

5.15. $y = \frac{x+1}{x^2}$;

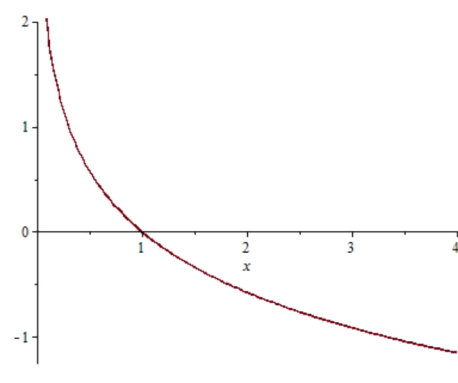
5.16. $y = \frac{x^2 + 2x - 4}{x^2}$.

6.

6.1. მოცემული ორი გრაფიკიდან რომელი შეესაბამება $y = \log_{0.3} x$ ფუნქციას?

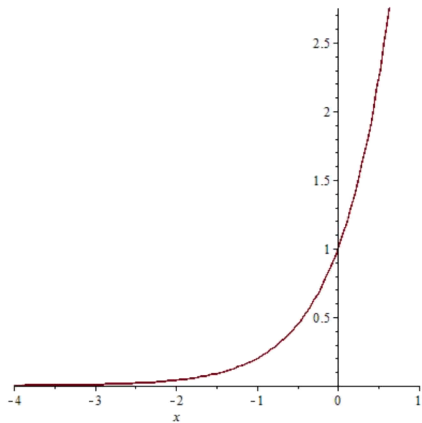


ა)

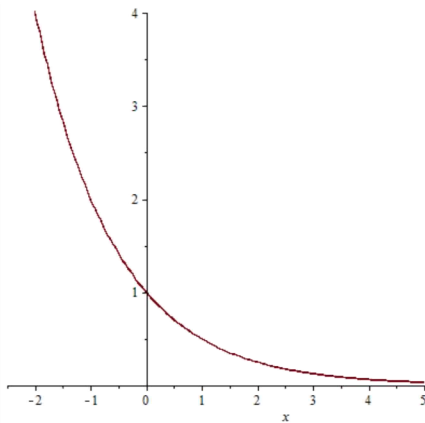


ბ)

6.2. მოცემული ორი გრაფიკიდან რომელი შეესაბამება $y = 0.5^x$ ფუნქციას



ა)



ბ)

7. ანტიწარმოებულების ცხრილის ფორმულების გამოყენებით გამოთვალეთ შემდეგი ინტეგრალები:

$$7.1. \int (3-x^2)^2 dx;$$

$$7.2. \int x^2(5-x)dx;$$

$$7.3. \int (1-x)(1-2x)(1-3x)dx;$$

$$7.4. \int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx;$$

$$7.5. \int \left(\frac{a}{x} + \frac{a^2}{x^2} + \frac{a^3}{x^3}\right) dx;$$

$$7.6. \int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx;$$

$$7.7. \int \frac{x^2+1}{x} dx;$$

$$7.8. \int \frac{x^2}{x^2+1} dx;$$

$$7.9. \int \frac{x^2+3}{x^2-1} dx;$$

$$7.10. \int (2^x + 3^x)^2 dx;$$

$$7.11. \int_{-1}^2 x^2 dx;$$

$$7.12. \int_0^1 3^x dx;$$

$$7.13. \int_2^3 \frac{dx}{x^2};$$

$$7.14. \int_1^e \frac{dx}{x};$$

$$7.15. \int_0^{\pi/2} \sin x dx;$$

$$7.16. \int_0^8 \sqrt[3]{x} dx;$$

$$7.17. \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx;$$

$$7.18. \int_a^b x^m dx \quad (0 < a < b; m \neq -1).$$

8. ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის გამოყენებით გამოთვალეთ შემდეგი ინტეგრალები:

$$8.1. \int x \sin x dx;$$

$$8.2. \int x \cos x dx;$$

$$8.3. \int \ln x dx;$$

$$8.4. \int x^2 e^x dx;$$

$$8.5. \int x \ln x dx;$$

$$8.6. \int x^2 \sin x dx;$$

$$8.7. \int x^n \ln x dx \quad (n \neq -1);$$

$$8.8. \int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx;$$

$$8.9. \int \sqrt{x} \ln^2 x dx;$$

$$8.10. \int x e^{-x} dx;$$

$$8.11. \int x^3 e^{-x^2} dx;$$

$$8.12. \int x \operatorname{sh} x dx;$$

$$8.13. \int x^3 \operatorname{ch} 3x dx;$$

$$8.14. \int \operatorname{arctg} x dx;$$

$$8.15. \int \arcsin x dx;$$

$$8.16. \int x \operatorname{arctg} x dx;$$

$$8.17. \int x^2 \arccos x dx;$$

$$8.18. \int \frac{\arcsin x}{x^2} dx;$$

$$8.19. \int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx;$$

$$8.20. \int x \ln \frac{1+x}{1-x} dx;$$

$$8.21. \int \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx;$$

$$8.22. \int \sin x \cdot \ln(\operatorname{tg} x) dx;$$

$$8.23. \int x^5 e^{x^3} dx;$$

$$8.24. \int (\arcsin x)^2 dx;$$

$$8.25. \int x (\arctg x)^2 dx;$$

$$8.26. \int x^2 \ln \frac{1-x}{1+x} dx;$$

$$8.27. \int \frac{x \ln(x + \sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} dx;$$

$$8.28. \int \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx;$$

$$8.29. \int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2};$$

$$8.30. \int \sqrt{a^2-x^2} dx;$$

$$8.31. \int \sqrt{x^2+a} dx;$$

$$8.32. \int x^2 \sqrt{a^2+x^2} dx;$$

$$8.33. \int x \sin^2 x dx;$$

$$8.34. \int e^{\sqrt{x}} dx;$$

$$8.35. \int x \sin \sqrt{x} dx;$$

$$8.36. \int \frac{x e^{\arctg x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx;$$

$$8.37. \int \frac{e^{\arctg x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx;$$

$$8.38. \int \sin(\ln x) dx;$$

$$8.39. \int \cos(\ln x) dx;$$

$$8.40. \int e^{ax} \cos bx dx;$$

$$8.41. \int e^{ax} \sin bx dx;$$

$$8.42. \int e^{2x} \sin^2 x dx;$$

$$8.43. \int (e^x - \cos x)^2 dx;$$

$$8.44. \int \frac{\arctg e^x}{e^x} dx;$$

$$8.45. \int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x} dx;$$

$$8.46. \int \frac{x dx}{\cos^2 x};$$

$$8.47. \int \frac{x e^x}{(x+1)^2} dx;$$

$$8.48. \int_0^{\pi} x \sin x dx;$$

$$8.49. \int_0^e \ln x dx;$$

$$8.50. \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx;$$

$$8.51. \int_0^e x \ln x dx.$$

9. ჩასმის ხერხის გამოყენებით გამოთვალეთ შემდეგი ინტეგრალები:

$$9.1. \int \sqrt{5x+8} dx;$$

$$9.2. \int \frac{dx}{x-10};$$

$$9.3. \int \frac{4x^3 dx}{x^4+1};$$

$$9.4. \int \frac{e^x dx}{e^x+3};$$

$$9.5. \int \frac{\ln^2 x dx}{x};$$

$$9.6. \int e^{5x} dx.$$

$$9.7. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{2+x^3}};$$

$$9.8. \int \frac{dx}{x^2+2x+1};$$

$$9.9. \int \frac{x^2}{x+1} dx;$$

$$9.10. \int x \sqrt{1+x^2} dx;$$

$$9.11. \int x e^{-x^2} dx;$$

$$9.12. \int \frac{e^x}{1+e^x} dx;$$

$$9.13. \int \operatorname{tg} x dx;$$

$$9.14. \int \operatorname{ctg} x dx;$$

$$9.15. \int_2^4 \frac{dx}{x+1};$$

$$9.16. \int_0^2 \frac{x dx}{1+x^2};$$

$$9.17. \int_0^1 x(2-x^2)^{12} dx;$$

$$9.18. \int_{-2}^{-1} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} dx;$$

$$9.19. \int_0^\pi \frac{-\sin x dx}{\cos x + 4}.$$

10. გამოთვალეთ შემდეგი ინტეგრალები:

$$10.1. \int \frac{1}{a+bx^2} dx \quad (ab \neq 0);$$

$$10.2. \int \frac{dx}{x^2-x+2};$$

$$10.3. \int \frac{(2x+3)dx}{(x-2)(x+5)};$$

$$10.4. \int \frac{xdx}{(x+1)(x+2)(x+3)};$$

$$10.5. \int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x} dx.$$

11. გამოთვალეთ შემდეგი პირველი გვარის წირითი ინტეგრალები l წირის გასწვრივ

11.1. $\int_l x^2 y ds$, სადაც l არის $y = x$ წრფის ნაწილი, კოორდინატთა სისტემის სათავიდან $(2;2)$ წერტილამდე.

11.2. $\int_l y^2 ds$, სადაც l არის $x = a \cos t$, $y = a \sin t$ წრეწირის $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ რკალი.

11.3. $\int_l x^2 ds$, სადაც l არის წირი $y = \ln x$, $1 \leq x \leq e$.

11.4. $\int_l ds$, სადაც l არის წრფის ნაწილი, კოორდინატთა სისტემის სათავიდან $A(1;2)$ წერტილამდე.

11.5. $\int_l (x^2 + y^2) z ds$, სადაც l წირი მოცემულია პარამეტრული სახით $r(t) = (\sin 3t, \cos 3t, 4t)$, $0 \leq t \leq \pi$.

11.6. $\int_l xy ds$, სადაც l წირი არის $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ელიფსის ნაწილი, რომელიც მდებარეობს პირველ კვადრანტში.

12. გამოთვალეთ შემდეგი მეორე გვარის წირითი ინტეგრალები L წირის გასწვრივ

12.1. $\int_L 2xy dx - x^2 dy$, სადაც L არის წრფის მონაკვეთი, რომელიც აერთებს $O(0;0)$ და $A(2;1)$ წერტილებს.

- 12.2. $\int_L \frac{ydx + xdy}{x^2 + y^2}$, სადაც L არის $A(1;1)$ და $B(2;2)$ წერტილების შემაერთებული $y = x$ წრფის მონაკვეთი.
- 12.3. $\int_L \cos y dx - \sin x dy$, სადაც L არის $A(2;-2)$ და $B(-2;2)$ წერტილების შემაერთებული წრფის მონაკვეთი.
- 12.4. $\int_L -x \cos y dx + y \sin x dy$, სადაც L არის $O(0;0)$ და $M(\pi;2\pi)$ წერტილების შემაერთებული წრფის მონაკვეთი.
- 12.5. $\int_L (x^2 - y^2) dy$, სადაც L არის $y = x^2$ პარაბოლის რკალი, მოთავსებული $O(0;0)$ და $A(2;4)$ წერტილებს შორის.
- 12.6. $\int_L 2xy dx - y^4 dy$, სადაც L არის $x = 2y^2$ პარაბოლის რკალი მოთავსებული $O(0;0)$ და $A(2;1)$ წერტილებს შორის.
- 12.7. $\int_L (4x - y) dx + 5x^2 y dy$, სადაც L არის $y = 3x^2$ პარაბოლის რკალი, მოთავსებული $O(0;0)$ და $A(1;3)$ წერტილებს შორის.
- 12.8. $\int_L (x^2 - 2xy) dx + (y^2 - 2xy) dy$, სადაც L არის $y = x^2$ პარაბოლის რკალი, მოთავსებული $A(-1;1)$ და $B(1;1)$ წერტილებს შორის.

13. გამოთვალეთ შემდეგი მეორე გვარის წირითი ინტეგრალები შეკრულ კონტურზე:

13.1. $\oint_L xdy - ydx$, სადაც L წარმოადგენს R რადიუსიან წრეწირს, რომლის ცენტრიც მდებარეობს კოორდინატთა სისტემის სათავეში და ინტეგრება ხდება:

- ა) საათის ისრის მოძრაობის საწინაარმდეგო მიმართულებით;
- ბ) საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით.

13.2. $\oint_L xy^2 dy - yx^2 dx$, სადაც L წირი (კონტური) წარმოადგენს $x^2 + y^2 = 4$

წრეწირს და ინტეგრება ხდება:

- ა) საათის ისრის მოძრაობის საწინაარმდეგო მიმართულებით;
- ბ) საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით.

13.3. $\oint_L 2(x^2 + y^2) dx + (x + y)^2 dy$, სადაც L წირი (კონტური) წარმოადგენს

სამკუთხედს, რომლის წვეროებია: $A(1,1)$, $B(2,2)$, $C(1,3)$ და ინტეგრება ხდება:

- ა) საათის ისრის მოძრაობის საწინაარმდეგო მიმართულებით;
- ბ) საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით.

13.4. $\oint_L (y + 2x)dx + 2(x + y)dy$, სადაც L კონტური $y = 4x^2$, $y = 4$, $x = 0$ წირებით

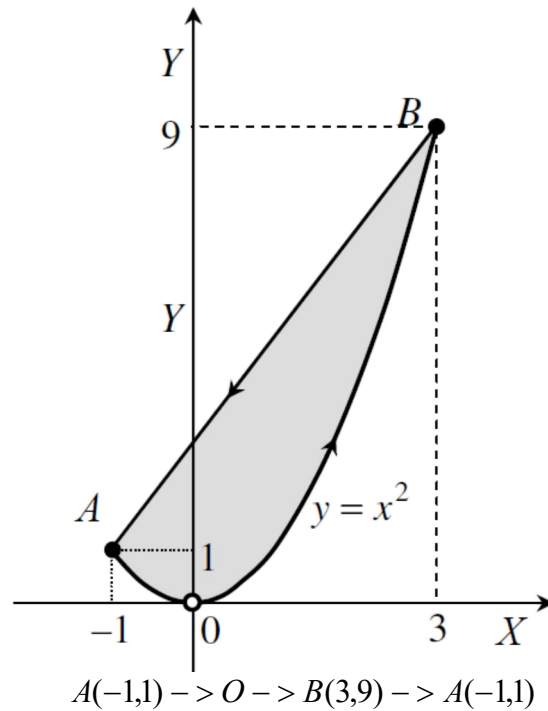
შემოსაზღვრული არის საზღვარია და ინტეგრება ხდება:

ა) საათის ისრის მოძრაობის საწინაარმდეგო მიმართულებით;

ბ) საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით.

13.5. $\int_L ydx + x^2dy$, სადაც L წირი (კონტური) წარმოადგენს $y = x^2$ პარაბოლის

AOB რკალითა და BA წრფით შემოსაზღვრული არის საზღვარს და ინტეგრება ხდება მითითებული მიმართულებით (იხ. ნახ. 13.5)



ნახ. 13.5

14. დაამტკიცეთ, რომ

ა) $y' = 2\sqrt{y}$;

ბ) $y' + y - 2 \cos x = 0$;

გ) $(x - y)y' - y = 0$

განტოლებების ამონახსნებია შესაბამისად

ა) $y = (x + C)^2$;

ბ) $y = Ce^{-x} + \cos x + \sin x$;

გ) $\ln y + \frac{x}{y} = C$

ფუნქციები, სადაც $C = const$.

15. იპოვეთ განცალკევად ცვლადებიანი შემდეგი დიფერენციალური განტოლებების ზოგადი ამონახსნები:

15.1. $xy' - y = 0$;

15.3. $y' = \frac{x}{y}$;

15.2. $y' = xy$;

15.4. $y' = (x + 1)y$;

15.5. $y' = (5x + 2)y$;
 15.6. $y' = y \sin x$;
 15.7. $(1 + y)dx - (1 - x)dy = 0$;
 15.8. $(1 + y^2)dx + xydy = 0$;
 15.9. $xyy' = 1 - x^2$;
 15.10. $y' \operatorname{tg} x = y$;
 15.11. $x\sqrt{1 + y^2}dx + y\sqrt{1 + x^2}dy = 0$;
 15.12. $(xy^2 + x)dx + (y - x^2y)dy = 0$;

15.13. $yy' = \frac{1 - 2x}{y}$;
 15.14. $xy' + x = x^2$;
 15.15. $y' = 10^{x+y}$;
 15.16. $y' = \sqrt{1 - y^2}$;
 15.17. $y' = \frac{y^2 - 2y}{2x}$;
 15.18. $\frac{dy}{dx} = \frac{1 + y^2}{1 + x^2}$.

16. შემდეგი დიფერენციალური განტოლებებისთვის ამოხსენით კოშის მითითებული ამოცანები:

16.1. $y'(x) = 3x^2 - 2x + 1, \quad y(1) = 2$;
 16.2. $xy'(x) - y(x) = 0, \quad y\left(\frac{1}{2}\right) = 2$;
 16.3. $y'(x) = y(x), \quad y(-2) = 2$;
 16.4. $y'(x) = 5x^3 + \cos x, \quad y(0) = 4$;
 16.5. $y'(x) = 3x^2 + \sin x, \quad y(0) = 3$;
 16.6. $y'(x) = 2x^5 + e^x, \quad y(0) = 2$;
 16.7. $y'(x) = 5 \sin x + 9 \cos x, \quad y(\pi) = 1$;
 16.8. $y'(x) = 3e^x + x^7 + 2, \quad y(0) = 7$.

17. იპოვეთ შემდეგი პირველი რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლებების ზოგადი ამონახსნები:

17.1. $y' + 2y = 4x$;
 17.2. $y' + 2xy = xe^{-x^2}$;
 17.3. $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$;
 17.4. $y' + y = \cos x$;
 17.5. $2ydx + (y^2 - 6x)dy = 0$;
 17.6. $y' = \frac{1}{2x - y^2}$;
 17.7. $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x$;
 17.8. $\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = x^3$;
 17.9. $(1 + y^2)dx = (\sqrt{1 + y^2} \sin y - xy)dy$;
 17.10. $y^2dx - (2xy + 3)dy = 0$;
 17.11. $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = -xy^2$;
 17.12. $2xy \frac{dy}{dx} - y^2 + x = 0$;
 17.13. $ydx + (x - \frac{1}{2}x^3y)dy = 0$;
 17.14. $3xdy = y(1 + x \sin x - 3y^3 \sin x)dx$;
 17.15. $x'(t) - \frac{1}{t}x(t) = t^2$.

18. იპოვეთ შემდეგი მეორე რიგის მულტიპლიციკაციონების წრფივი ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლებების ზოგადი ამონახსნები:

18.1. $y''(x) + y'(x) - 6y(x) = 0$;
 18.2. $y''(x) - 2y'(x) - 8y(x) = 0$;
 18.3. $y''(x) + y'(x) - 30y(x) = 0$;
 18.4. $y''(x) - y'(x) - 20y(x) = 0$;
 18.5. $y''(x) + y'(x) - 2y(x) = 0$;
 18.6. $y''(x) - 4y'(x) = 0$;

$$18.7. \quad y''(x) + 6y'(x) + 13y(x) = 0;$$

$$18.9. \quad y''(x) + 4y'(x) + 3y(x) = 0;$$

$$18.8. \quad y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 0;$$

$$18.10. \quad y''(x) + 4y'(x) + 29y(x) = 0.$$

19. იპოვეთ შემდეგი ერთგვაროვანი არაწრფივი განტოლებების ზოგადი ამონახსნები:

$$19.1. \quad y' = -\frac{x+y}{x+2y};$$

$$19.6. \quad y' = \frac{y}{x} - 1;$$

$$19.2. \quad y' = \frac{x+y}{x+2y};$$

$$19.7. \quad y' = -\frac{x+y}{x};$$

$$19.3. \quad y' = \frac{x^2 + y^2}{4x^2 + y^2};$$

$$19.8. \quad (y-x)ydx - x^2dy = 0;$$

$$19.9. \quad (2x-y+4)dy + (x-2y+5)dx = 0;$$

$$19.4. \quad y' = \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$19.10. \quad y' = \frac{1-3x-3y}{1+x+y};$$

$$19.5. \quad y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x};$$

$$19.11. \quad y' = \frac{x+2y+1}{2x+4y+3}.$$

20. ამოხსენით შემდეგი განტოლებები სრულ დიფერენციალებში:

$$20.1. \quad (y-x^3)dx + (x+y^3)dy = 0;$$

$$20.2. \quad (\cos y + y \cos x)dx + (\sin x - x \sin y)dy = 0;$$

$$20.3. \quad (3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0;$$

$$20.4. \quad \left(2xy + \frac{y^3}{3}\right)dx + (xy^2 + x^2)dy = 0;$$

$$20.5. \quad (x+y)dx + (x+2y)dy = 0;$$

$$20.6. \quad (x^2 + y^2 + 2x)dx + 2xydy = 0;$$

$$20.7. \quad (x^3 - 3xy^2 + 2)dx - (3x^2y - y^2)dy = 0;$$

$$20.8. \quad 2xydx + (y^2 + x^2)dy = 0;$$

$$20.9. \quad \frac{2xdx}{y^3} + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}dy = 0;$$

$$20.10. \quad \left(x + e^{\frac{x}{y}}\right)dx + e^{\frac{x}{y}}\left(1 - \frac{x}{y}\right)dy = 0.$$

21. იპოვეთ ბერნულის და რიკატის შემდეგი განტოლებების ზოგადი ამონახსნები:

$$21.1. \quad y' = \frac{4y}{x} + x\sqrt{y};$$

$$21.4. \quad xy' - 2y = 4x^3y^{1/2};$$

$$21.2. \quad y' = \frac{1}{x}y - \frac{y^2}{x};$$

$$21.5. \quad y' - \left(\frac{1}{x} + 2x^4\right)y = x^3y^2;$$

$$21.3. \quad y' = y + xy^2;$$

$$21.6. \quad y' = -x^2 + \frac{y}{x} + x^3y^2.$$

22. იპოვეთ შემდეგი ნორმალური სახის პირველი რიგის სიმეტრიული ფორმის სისტემების ზოგადი ამონახსნები:

$$22.1. \frac{dx}{1} = \frac{dy}{1} = \frac{dz}{2};$$

$$22.2. \frac{dx}{y+z} = \frac{dy}{z+x} = \frac{dz}{x+y};$$

$$22.3. \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{xy};$$

$$22.4. \frac{dx}{x+2y} = \frac{dy}{ay}, \text{ სადაც } a$$

ნებისმიერი მუდმივია.

სავარჯიშოების შესრულებისათვის საჭირო ზოგიერთი ფორმულა და ფაქტი

ზოგიერთი ფუნქციის წარმოებულისა და ანტიწარმოებულების ცხრილი:

$\frac{dx^n}{dx} = (x^n)' = nx^{n-1}$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \neq -1, \quad c = const$
$\frac{de^x}{dx} = (e^x)' = e^x$	$\int e^x dx = e^x + c, \quad c = const$
$\frac{da^x}{dx} = (a^x)' = a^x \ln a, \quad a > 0$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, \quad a > 0, \quad c = const$
$\frac{d \ln x}{dx} = (\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad x > 0$	$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c, \quad x > 0, \quad c = const$
$\frac{d \log_a x}{dx} = (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a},$ $x > 0, \quad a > 0$	
$\frac{d \sin x}{dx} = (\sin x)' = \cos x$	$\int \cos x dx = \sin x + c, \quad c = const$
$\frac{d \cos x}{dx} = (\cos x)' = -\sin x$	$\int \sin x dx = -\cos x + c, \quad c = const$
$\frac{d \operatorname{tg} x}{dx} = (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c, \quad c = const$
$\frac{d \operatorname{ctg} x}{dx} = (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c, \quad c = const$
$\frac{d \arcsin x}{dx} = (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + c \\ -\arccos x + c \end{cases}, \quad c = const$
$\frac{d \arccos x}{dx} = (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\frac{d \operatorname{arctg} x}{dx} = (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + c \\ -\operatorname{arcctg} x + c \end{cases}, \quad c = const$
$\frac{d \operatorname{arcctg} x}{dx} = (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$	
$\frac{d \operatorname{ch} x}{dx} = (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$	$\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + c, \quad c = const$
$\frac{d \operatorname{sh} x}{dx} = (\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$	$\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + c, \quad c = const$
$\frac{d \operatorname{cth} x}{dx} = (\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$	$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + c, \quad c = const$
$\frac{d \operatorname{th} x}{dx} = (\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + c, \quad c = const$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm 1}| + c, \quad c = \text{const}$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + c, \quad c = \text{const}$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \begin{cases} \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c \\ -\frac{1}{a} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + c \end{cases}, \quad a \neq 0, \quad c = \text{const}$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + c, \quad a \neq 0, \quad c = \text{const}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \begin{cases} \arcsin \frac{x}{a} + c \\ -\arccos \frac{x}{a} + c \end{cases}, \quad a > 0, \quad c = \text{const}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + c, \quad a > 0, \quad c = \text{const}$$

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + c, \quad c = \text{const}$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + c, \quad c = \text{const}$$

წარმოებულის თვისებები:

1. $(\text{const})' = 0$
2. $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$
3. $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
4. $(cf(x))' = cf'(x), \quad c = \text{const}$
5. $\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}, \quad g(x) \neq 0$
6. $f'(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$

ვთქვათ, f და g ფუნქციები ინტეგრებადია $[a, b]$ -ზე და c მუდმივია, მაშინ:

$$1. \int_a^b cf = c \int_a^b f, \quad c = \text{const}$$

$$2. \int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$$

$$3. \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f, \quad \text{სადაც } c \in]a, b[$$

$$4. \left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

$$5. \text{ თუ } f \leq g \text{ და } a < b, \text{ მაშინ } \int_a^b f \leq \int_a^b g$$

კალკულუსის ძირითადი თეორემა

თეორემა. თუ f უწყვეტი ფუნქციაა ღია ინტერვალზე, რომელიც $[a, b]$ სეგმენტს შეიცავს, მაშინ:

$$1. \frac{d}{db} \int_a^b f(x) dx = f(b); \quad (1)$$

$$2. \text{ თუ } f(x) = F'(x), \text{ მაშინ } \int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b := F(b) - F(a). \quad (2)$$

(2) ფორმულას *ნიუტონ-ლაიბნიცის ფორმულა* ეწოდება. $F(x)$ ფუნქციას ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის პირველყოფილი, პრიმიტიული ფუნქცია. მას უწოდებენ აგრეთვე ანტიწარმოებულს ან *განუსაზღვრელ ინტეგრალს* და წერენ $\int f(x) dx$ ფორმითაც.

ფუნქციის დიფერენციალი:

$$df(x) = f'(x) dx$$

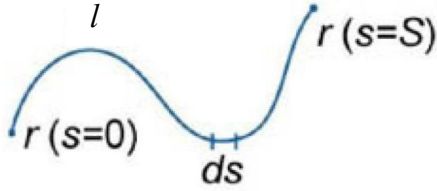
ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულები:

$$\int f(x) dg(x) = f(x)g(x) - \int g(x) df(x) \Leftrightarrow \int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx;$$

$$\int_a^b f(x) dg(x) = f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b g(x) df(x) \Leftrightarrow \int_a^b f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx .$$

პირველი გვარის წირითი ინტეგრალის თვისებები

დავუშვათ l ნებისმიერი წირია, რომელიც აღიწერება $r = r(s)$, $0 \leq s \leq S$. განტოლებით, სადაც s წირის რკალის სიგრძეა (იხ. ნახ. 1).



ნახ. 1

პირველი გვარის წირითი ინტეგრალს აქვს შემდეგი თვისებები:

1. ინტეგრალი არ არის დამოკიდებული წირის ორიენტაციაზე;
2. თუ გლუვი l წირი შეიძლება წარმოვადგინოთ, როგორც ორი l_1 და l_2 წირის გაერთიანება, მაშინ

$$\int_l F(x, y, z) ds = \int_{l_1} F(x, y, z) ds + \int_{l_2} F(x, y, z) ds;$$

3. თუ გლუვი l წირი მოცემულია პარამეტრული სახით: $r = r(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, და F ფუნქცია უწყვეტია l -ზე, მაშინ

$$\int_l F(x, y, z) ds = \int_\alpha^\beta F(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt;$$

4. თუ გლუვი l გლუვი წირია Oxy სიბრტყეზე, რომელიც მოცემულია განტოლებით: $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, მაშინ

$$\int_l F(x, y) ds = \int_a^b F(x, f(x)) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx;$$

5. თუ Oxy სიბრტყეზე l გლუვი წირი მოცემულია შემდეგი განტოლებით: $x = f(y)$, $c \leq y \leq d$, მაშინ

$$\int_l F(x, y) ds = \int_c^d F(f(y), y) \sqrt{(f'(y))^2 + 1} dy;$$

6. პოლარულ კოორდინატებში $\int_l F(x, y) ds$ გამოითვლება შემდეგი ფორმულით

$$\int_l F(x, y) ds = \int_\alpha^\beta F(r \cos \theta, r \sin \theta) \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta,$$

სადაც $r = r(\theta)$, $\theta \in [\alpha, \beta]$, წარმოადგენს l წირის განტოლებას პოლარ კოორდინატებში.

მეორე გვარის წირითი ინტეგრალის თვისებები

1.
$$\int_{AB} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = - \int_{BA} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$

2. თუ $y = \varphi(x)$ არის L წირის განტოლება, მაშინ

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_a^b \{P[x, \varphi(x)] + Q[x, \varphi(x)] \varphi'(x)\} dx,$$

სადაც a და b , შესაბამისად, წირის A და B წერტილების აბსცისებია.

3. თუ წირის განტოლება მოცემულია პარამეტრული სახით: $x = x(t)$, $y = y(t)$ და $z = z(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, მაშინ

$$\begin{aligned} & \int_{AB} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \{P[x(t), y(t), z(t)]x'(t) + Q[x(t), y(t), z(t)]y'(t) + R[x(t), y(t), z(t)]z'(t)\} dt, \end{aligned}$$

სადაც t_1 და t_2 არის t პარამეტრის ის მნიშვნელობები, რომლებიც შეესაბამება A და B წერტილებს.

პასუხები:

1.1 $\frac{1}{5}$; 1.2 $\frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^4}$; 1.3 e^{e^x+x} ; 1.4 $5 \sin^4 x \cos x$;
 1.5 $\left(\frac{a}{b}\right)^x \left(\frac{x}{b}\right)^{a-1} \left[\left(\frac{x}{b}\right) \ln \frac{a}{b} + a\right]$; 1.6 $\frac{8x}{x^2+1}$; 1.7 $-\frac{4x^3}{(1+x^4)^2}$; 1.8 $\sin(\cos x) \cdot \cos x$;
 1.9 $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$; 1.10 $x^x(\ln x + 1)$; 1.11 $x^{\sin x} \left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x} \right)$.

2.1 $x_{\max} = 0, y_{\max} = 4; x_{\min} = 1, y_{\min} = 3\frac{5}{6}$; 2.2 $x_{\max} = -1, y_{\max} = -2; x_{\min} = 1, y_{\min} = 2$;

2.3 $x_{\max} = 0, y_{\max} = -2; x_{\min} = 2, y_{\min} = 2$; 2.4 $x_{\max} = 1, y_{\max} = 3$;

2.5 $x_{\max} = 1, y_{\max} = 1; x_{\min} = 0, y_{\min} = 0$;

2.6 $x_{\max} = 2, y_{\max} = \frac{1}{4}; x_{\min} = -2, y_{\min} = -\frac{1}{4}$; 2.7 $x_{\min} = \frac{1}{e}, y_{\min} = -\frac{1}{e}$.

3.1. ქვემოთ ამოზნექილია $(-\infty, +\infty)$ შუალედში, გადაღუნვის წერტილები არ აქვს;

3.2. ამოზნექილია $(-\infty, +\infty)$ შუალედში, გადაღუნვის წერტილები არ აქვს;

3.3. ქვემოთ ამოზნექილია $(0, +\infty)$, ზემოთ ამოზნექილია $(-\infty, 0)$, გადაღუნვის წერტილები არ აქვს;

3.4. ქვემოთ ამოზნექილია $(-\infty; \sqrt[4]{3}) \cup (\sqrt[4]{3}; +\infty)$, ზემოთ ამოზნექილია $(-\sqrt[4]{3}; 0) \cup (0; \sqrt[4]{3})$, გადაღუნვის წერტილებია $x_1 = -\sqrt[4]{3}, y_1 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ და $x_2 = \sqrt[4]{3}, y_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$;

3.5. ქვემოთ ამოზნექილია $(-\infty; -\frac{\sqrt{3}}{3}) \cup (\frac{\sqrt{3}}{3}; +\infty)$, ზემოთ ამოზნექილია $(-\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3})$,

გადაღუნვის წერტილებია $x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}, y_1 = -\frac{5}{6}$ და $x_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}, y_2 = -\frac{5}{6}$;

3.6. ქვემოთ ამოზნექილია $(-\infty; -\frac{\sqrt{3}}{3}) \cup (\frac{\sqrt{3}}{3}; +\infty)$, ზემოთ ამოზნექილია $(-\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3})$,

გადაღუნვის წერტილებია $x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}, y_1 = -\frac{3}{4}$ და $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}, y_2 = \frac{3}{4}$;

3.7. ქვემოთ ამოზნექილია $(-\infty; -\frac{\sqrt{2}}{2}) \cup (\frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty)$, ზემოთ ამოზნექილია $(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2})$,

გადაღუნვის წერტილებია $x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, y_1 = e^{-\frac{1}{2}}$ და $x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}, y_2 = e^{-\frac{1}{2}}$.

4.1. $y = 0, \quad x = \pm 2;$ **4.2.** $y = \frac{1}{2};$ **4.3.** $y = 0, \quad x = -\frac{3}{4};$
4.4. $y = x, \quad x = 3;$ **4.5.** $y = x, \quad x = 0;$ **4.6.** $y = 3x;$ **4.7.** $y = x, \quad y = -x;$
4.8. $y = 0.$

6.1. $\delta.$ **6.2.** $\delta.$

7.1. $\frac{x^5}{5} - 2x^3 + 9x + c;$ **7.2.** $\frac{5x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + c;$ **7.3.** $x - 3x^2 + \frac{11}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^4 + c;$
7.4. $x - \frac{1}{x} - 2\ln|x| + c;$ **7.5.** $a \ln|x| - \frac{a^2}{x} - \frac{a^3}{2x^2} + c$ **7.6.** $\frac{2}{3}x\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + c;$
7.7. $\frac{x^2}{2} + \ln|x| + c;$ **7.8.** $x - \operatorname{arctg}x + c;$ **7.9.** $x - 2\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + c;$
7.10. $\frac{4^x}{\ln 4} + \frac{2 \cdot 6^x}{\ln 6} + \frac{9^x}{\ln 9} + c;$ **7.11.** $3;$ **7.12.** $\frac{2}{\ln 3};$ **7.13.** $\frac{1}{6};$ **7.14.** $1;$
7.15. $1;$ **7.16.** $12;$ **7.17.** $\frac{\pi}{3};$ **7.18.** $\frac{b^{m+1} - a^{m+1}}{m+1}.$

8.1. $\sin x - x \cos x;$ **8.2.** $\cos x + x \sin x;$ **8.3.** $x \ln x - x;$ **8.4.** $(x^2 - 2x + 2)e^x;$
8.5. $\frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2;$ **8.6.** $-x^2 \cos x + 2 \cos x + 2x \sin x;$ **8.7.** $\frac{x^{n+1}}{n+1} \left(\ln x - \frac{1}{n+1} \right), \quad n \neq -1;$
8.8. $-\frac{1}{x}(\ln^2 x + 2 \ln x + 2);$ **8.9.** $\frac{2}{3}x^{3/2} \left(\ln^2 x - \frac{4}{3} \ln x + \frac{8}{9} \right);$ **8.10.** $-(x+1)e^{-x};$
8.11. $-\frac{x^2+1}{2}e^{-x^2};$ **8.12.** $x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x;$ **8.13.** $\left(\frac{x^3}{3} + \frac{2x}{9} \right) \operatorname{sh} 3x - \left(\frac{x^2}{3} + \frac{2}{27} \right) \operatorname{ch} 3x;$
8.14. $x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2);$ **8.15.** $x \operatorname{arcsin} x + \sqrt{1-x^2};$ **8.16.** $-\frac{x}{2} + \frac{1+x^2}{2} \operatorname{arctg} x;$
8.17. $-\frac{2+x^2}{9} \sqrt{1-x^2} + \frac{x^3}{3} \operatorname{arccos} x;$ **8.18.** $-\frac{\operatorname{arcsin} x}{x} - \ln \left| \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} \right|;$
8.19. $x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2};$ **8.20.** $x - \frac{1-x^2}{2} \ln \frac{1+x}{1-x};$ **8.21.** $-\sqrt{x} + (1+x) \operatorname{arctg} \sqrt{x};$
8.22. $\ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| - \cos x \cdot \ln |\operatorname{tg} x|;$ **8.23.** $\frac{1}{3}(x^3 - 1)e^{x^3};$ **8.24.** $x(\operatorname{arcsin} x)^2 + 2\sqrt{1-x^2} \operatorname{arcsin} x - 2x;$
8.25. $\frac{1+x^2}{2}(\operatorname{arctg} x)^2 - x \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \ln(1+x^2);$ **8.26.** $-\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3} \ln|1-x^2| + \frac{x^3}{3} \ln \left| \frac{1-x}{1+x} \right|;$
8.27. $\sqrt{1+x^2} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - x;$ **8.28.** $-\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x;$
8.29. $\frac{x}{2a^2(a^2+x^2)} + \frac{1}{2a^3} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} \quad (a \neq 0);$ **8.30.** $\frac{x}{2} \sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} \quad (a \neq 0);$

8.31. $\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a} + \frac{a}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+a}|$; **8.32.** $\frac{x(2x^2+a^2)}{8}\sqrt{x^2+a^2} - \frac{a^4}{8}\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|$;
8.33. $\frac{x^2}{4} - \frac{x}{4}\sin 2x - \frac{\cos 2x}{8}$; **8.34.** $2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}}$; **8.35.** $2(6-x)\sqrt{x}\cos\sqrt{x} - 6(2-x)\sin\sqrt{x}$;
8.36. $-\frac{(1-x)e^{\operatorname{arctg}x}}{2\sqrt{1+x^2}}$; **8.37.** $\frac{(1+x)e^{\operatorname{arctg}x}}{2\sqrt{1+x^2}}$; **8.38.** $\frac{x}{2}[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)]$;
8.39. $\frac{x}{2}[\sin(\ln x) + \cos(\ln x)]$; **8.40.** $\frac{a\cos bx + b\sin bx}{a^2+b^2}e^{ax}$;
8.41. $\frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax}$; **8.42.** $\frac{e^{2x}}{8}(2 - \sin 2x - \cos 2x)$;
8.43. $\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x - e^x(\cos x + \sin x) + \frac{1}{2}e^{2x}$; **8.44.** $-x + \frac{1}{2}\ln(1+e^{2x}) - e^{-x}\operatorname{arctg}(e^x)$;
8.45. $-x - \operatorname{ctg}x \cdot \ln(e^x \sin x)$; **8.46.** $x\operatorname{tg}x + \ln|\cos x|$; **8.47.** $\frac{e^x}{x+1}$;
8.48. π ; **8.49.** 0 ; **8.50.** 0 ; **8.51.** $\frac{1}{4}e^2$.
9.1. $\frac{2}{15}(5x+1)^{3/2} + c$; **9.2.** $\ln(x-10) + c$; **9.3.** $\ln(x^4+1) + c$; **9.4.** $\ln(e^x+3) + c$;
9.5. $\frac{\ln^3 x}{3} + c$; **9.6.** $\frac{e^{5x}}{5} + c$; **9.7.** $\frac{2}{3}\sqrt{x^3+2} + c$; **9.8.** $-\frac{1}{x+1} + c$; **9.9.** $\frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| + c$;
9.10. $\frac{(1+x^2)^{3/2}}{3} + c$; **9.11.** $-\frac{1}{2}e^{-x^2} + c$; **9.12.** $\ln(e^x+1) + c$; **9.13.** $-\ln|\cos x| + c$;
9.14. $\ln(\sin x) + c$; **9.15.** $\ln\frac{5}{3}$; **9.16.** $\ln\sqrt{5}$; **9.17.** $\frac{2^{13}-1}{26}$; **9.18.** $-\sqrt{3}$;
9.19. $\ln\frac{3}{5}$.
10.1. $\frac{1}{\sqrt{ab}}\operatorname{arctg}(x\sqrt{b/a}) + c$, $\forall ab > 0$; $\frac{\operatorname{sgn} a}{2\sqrt{-ab}}\ln\left|\frac{\sqrt{|a|} + x\sqrt{|b|}}{\sqrt{|a|} - x\sqrt{|b|}}\right| + c$, $\forall ab < 0$;
10.2. $-\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{7}} + c$; **10.3.** $\ln|x-2| + \ln|x+5| + c$;
10.4. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{(x+2)^4}{(x+1)(x+3)^3}\right| + c$; **10.5.** $x + \frac{1}{6}\ln|x| - \frac{9}{2}\ln|x-2| + \frac{28}{3}\ln|x-3| + c$.
11.1. $4\sqrt{2}$; **11.2.** $\frac{a^3\pi}{4}$; **11.3.** $\frac{\sqrt{(1+e^2)^3} - \sqrt{8}}{3}$; **11.4.** $\sqrt{5}$; **11.5.** $10\pi^2$;
11.6. $\frac{ab(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}$.

12.1. $\frac{4}{3}$; 12.2. $\ln 2$; 12.3. $-2 \sin 2$; 12.4. 4π ; 12.5. $-\frac{40}{3}$; 12.6. 3;

12.7. 16; 12.8. $-\frac{14}{15}$.

13.1 ა) $2\pi R^2$;

ამოხსნა: თუ გამოვიყენებთ წრეწირის

$$\begin{cases} x = R \cos t, \\ y = R \sin t, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

პარამეტრული სახით განტოლებას, მივიღებთ

$$\begin{aligned} \oint_L xy^2 dy - yx^2 dx &= \int_0^{2\pi} (R \cos t \cdot R \cos t - R \sin t \cdot (-R \sin t)) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (R^2 \cos^2 t + R^2 \sin^2 t) dt = R^2(2\pi - 0) = 2\pi R^2. \end{aligned}$$

13.1. ბ) $-2\pi R^2$; 13.2. ა) 8π ;

ამოხსნა: შემოვიღოთ $P(x, y) = -x^2 y$, $Q(x, y) = xy^2$ აღნიშვნები. ცხადია,

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = x^2 + y^2,$$

$$\oint_L xy^2 dy - yx^2 dx = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy^*).$$

პოლარულ კოორდინატებზე $\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \end{cases} \quad \varphi \in [0, 2\pi]$, გადასვლის შემდეგ მივიღებთ

$$\iint_D (x^2 + y^2) dx dy = \iint_D r^2 r dr d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r^3 dr = 8\pi.$$

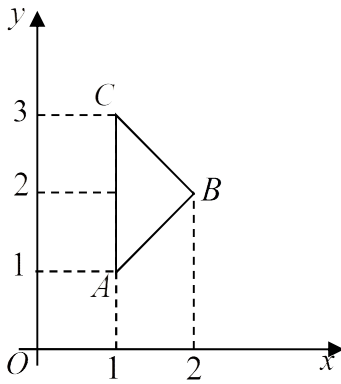
13.2. ბ) -8π ; 13.3. ა) $-\frac{4}{3}$;

ამოხსნა: ჩვენ შემთხვევაში $P(x, y) = 2(x^2 + y^2)$, $Q(x, y) = (x + y)^2$, ამიტომ

^{*)} თეორემა: თუ D არე შემოსაზღვრულია L შეკრული წირით (კონტურით), ხოლო $P(x, y)$ და $Q(x, y)$ უწყვეტი ფუნქციებია D არის ჩაკეტვაზე და გააჩნიათ $\frac{\partial Q}{\partial x}$ და $\frac{\partial P}{\partial y}$ უწყვეტი კერძო წარმოებულები, მაშინ

$$\oint_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

ამ უკანასკნელს გრინის ფორმულა ეწოდება.



ნახ. 13.3ა

$$\oint_L 2(x^2 + y^2)dx + (x + y)^2 dy = \iint_D 2(x - y)dxdy,$$

სადაც D არე წარმოადგენს ABC სამკუთხედს (იხ. ნახ 13.3ა). ცხადია, AB წრფის განტოლებაა: $y = x$, ხოლო BC წრფის - $y = 4 - x$, $x \in [1, 2]$. D არეზე ორმაგი ინტეგრალის გამოთვლის შემდეგ მივიღებთ:

$$\iint_D 2(x - y)dxdy = 2 \int_1^2 dx \int_x^{4-x} (x - y)dy = -\frac{4}{3}.$$

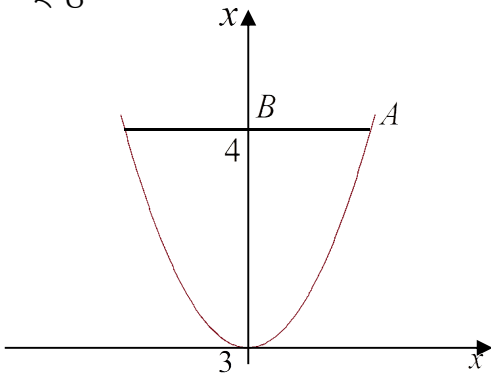
13.3. ბ) $\frac{4}{3}$;

13.4. -16;

ამოხსნა: ავაკოთ L წირი (იხ. ნახ. 13.4), ინტეგრების მიმართულებად ავიღოთ საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულება. ინტეგრალი L წირის გასწვრივ, შეიძლება წარმოვადგინოთ, როგორც შემდეგი სამი ინტეგრალის ჯამი

$$\oint_L 2(y + 2x)dx + 2(x + y)dy = \int_{OA} (y + 2x)dx + 2(x + y)dy + \int_{AB} (y + 2x)dx + 2(x + y)dy + \int_{BO} (y + 2x)dx + 2(x + y)dy = \frac{8}{3},$$

სადაც



ნახ. 13.4

$$\int_{OA} (y + 2x)dx + 2(x + y)dy = \left| \begin{array}{l} y = 4x^2 \\ dy = 8xdx \end{array} \right|$$

$$= \int_0^1 (4x^2 + 2x)dx + 2(x + 4x^2)8xdx = \frac{71}{3},$$

$$\int_{AB} (y + 2x)dx + 2(x + y)dy = \left| \begin{array}{l} y = 4 \\ dy = 0 \end{array} \right| = \int_1^0 (4 + 2x)dx = -5,$$

$$\int_{BO} (y + 2x)dx + 2(x + y)dy = \left| \begin{array}{l} x = 0 \\ dx = 0 \end{array} \right| = \int_4^0 2ydy = -16.$$

13.5. $\frac{32}{3}$. 15.1. $y = Cx$; 15.2. $y = Ce^{\frac{x^2}{2}}$; 15.3. $y = \pm\sqrt{x^2 + C}$;

15.4. $y = Ce^{\frac{x(x+2)}{2}}$; 15.5. $y = Ce^{\frac{x(5x+4)}{2}}$; 15.6. $y = Ce^{-\cos x}$; 15.7. $y = \frac{-x + C}{x - 1}$;

15.8. $y = \pm \frac{\sqrt{C - x^2}}{x}$; 15.9. $y^2 = -x^2 + \ln x^2 + C$; 15.10. $y = C \sin x$;

15.11. $\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1} + C = 0$; 15.12. $y^2 = C(x^2 - 1) - 1$; 15.14. $\frac{y^3}{3} = x - x^2 + C$;

15.14. $y = \frac{x^2}{2} - \ln x + C$, $x > 0$; 15.15. $10^x + 10^y = C$; 15.16. $y = \sin(x + C)$;

15.17. $y = \frac{2}{Cx+1}$; **15.18.** $y = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg}x + C)$.
16.1. $y = x^3 - x^2 + x + 1$; **16.2.** $y = 4x$; **16.3.** $y = 2e^{x+2}$;
16.4. $y = \frac{5}{4}x^4 + \sin x + 4$; **16.5.** $y = x^3 - \cos x + 4$; **16.6.** $y = \frac{1}{3}x^6 + e^x + 1$;
16.7. $y = -5\cos x + 9\sin x - 4$; **16.8.** $y = 3e^x + \frac{1}{8}x^8 + 2x + 4$.
17.1. $y = 2x - 1 + Ce^{-2x}$; **17.2.** $y = e^{-x^2} \left(\frac{1}{2}x^2 + C \right)$; **17.3.** $y = (x^2 + 1)(x + C)$;
17.4. $y = \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x + Ce^{-x}$; **17.5.** $x = y^3 \left(-\frac{1}{2}\ln y + C \right)$;
17.6. $x = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}y + \frac{1}{4} + Ce^{2y}$; **17.7.** $y = Cx + x^2$; **17.8.** $y = \frac{1}{6}x^4 + \frac{C}{x^2}$;
17.9. $x\sqrt{1+y^2} + \cos y = C$ (მოითხოვება: განტოლება წრფივია x და $\frac{dx}{dy}$ -ის მიმართ);
17.10. $x = Cy^2 - \frac{1}{y}$; **17.11.** $y(x^2 + Cx) = 1$; **17.12.** $y^2 = x \ln \frac{C}{x}$;
17.13. $x^2 = \frac{1}{y + Cy^2}$; **17.14.** $x = y^3(3 + Ce^{\cos y})$; **17.15.** $x = t \left(\frac{1}{2}t^2 + C \right)$.
18.1. $y = C_1e^{-3x} + C_2e^{2x}$; **18.2.** $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{4x}$; **18.3.** $y = C_1e^{-6x} + C_2e^{5x}$;
18.4. $y = C_1e^{-4x} + C_2e^{5x}$; **18.5.** $y = C_1e^{-2x} + C_2e^x$; **18.6.** $y = C_1 + C_2e^{4x}$;
18.7. $y = C_1e^{-3x} \sin(2x) + C_2e^{-3x} \cos(2x)$; **18.8.** $y = C_1e^x + C_2xe^x$;
18.9. $y = C_1e^{-3x} + C_2e^{-x}$; **18.10.** $y = C_1e^{-2x} \sin(5x) + C_2e^{-2x} \cos(5x)$.
19.1. $x^2 + 2xy + 2y^2 = C$, $C > 0$; **19.2.** $\left| 1 + \sqrt{2} \frac{y}{x} \right| = Cx$, $C > 0$;
19.4. $\left(\frac{y}{x} \right)^2 + \sqrt{\left(\frac{y}{x} \right)^2 + 1} = Cy$; **19.5.** $y = -x \ln \ln \frac{C}{x}$; **19.6.** $y = x \ln \left| \frac{C}{x} \right|$;
19.7. $y = \frac{C}{x} - \frac{x}{2}$; **19.8.** $y = Ce^{\frac{x}{y}}$; **19.9.** $(x + y - 1)^3 = C(x - y + 3)$;
18.10. $3x + y + 2 \ln|x + y - 1| = C$; **18.11.** $\ln|4x + 8y + 5| + 8y - 4x = C$.
20.1. $4yx - x^4 + y^4 = C$; **20.2.** $y = x \cos y + y \sin x = C$; **20.3.** $x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C$;
20.4. $ye^x \left(x^2 + \frac{y^2}{3} \right) = C$; **20.5.** $\frac{x^2}{2} + xy + y^2 = C$; **20.6.** $\frac{x^3}{3} + xy^2 + x^2 = C$;
20.7. $\frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}x^2y^2 + 2x + \frac{y^3}{3} = C$; **20.8.** $x^2 + y^2 - 2 \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = C$; **20.9.** $x^2 - y^2 = Cy^3$;
20.10. $\frac{x^2}{2} + ye^{\frac{x}{y}} = 2$.

$$\begin{array}{lll}
 \mathbf{21.1.} & y^2 = x^4 \left(\frac{1}{2} \ln x + C \right)^2, & y = 0; \quad \mathbf{21.2.} & y = \frac{x}{x+C}; & \mathbf{21.3.} & y = \frac{1}{1 + Ce^{-x} - x}, & y = 0; \\
 \mathbf{21.4.} & y = x^2(x^2 + C)^2; & \mathbf{21.5.} & y = -\frac{2x}{1 + Ce^{\frac{2x^5}{5}}}; & \mathbf{21.6.} & y = x - \frac{2x}{1 + Ce^{\frac{2x^5}{5}}}.
 \end{array}$$