# 1. თეორიული მექანიკის საგანი

*თეორიული მექანიკა* სწავლობს მატერიალურ სხეულთა მექანიკურ მოძღაობას. ამ მოძრაობის ქვეშ გვესმის მატერიალური სხეულების მდებარეობის შეცვლა გარკვეული საფარდო სიტემის მიმართ. თეორიული მექანიკა იყოფა შემდეგ ნაწილებად: ა) სტატიკა; ბ) კინემატიკა; გ) დინამიკა.

*სტატიკა* სწავლობს მატერიალურ სხეულთა წონასწორობის პირობებს.

*კინემატიკა* შეისწავლის მატერიალურ სხეულთა მოძრაობის კანონებს იმ ძალების გაუთვალისწინებლად, რომლებიც იწვევენ ამ მოძრაობას ე.ი. იგი განიხილავს მოძრაობის მხოლოდ გეომეტრიულ მხარეს.

*დინამიკა* შეისწავლის მატერიალურ სხეულთა მოძრაობის კანონებს მისი გამომწვევი მიზეზების (ძალების) გათვალისწინებით.

# 2. სტატიკის ცნებები და ძირითადი პრინციპები

სტატიკაში შესწავლის ობიექტებს წარმოადგენენ მატერიალური წერტილი, მატერიალურ წერტილთა სისტემა და მყარი სხეული.

მატერიალური სხეული ეწოდება იმდენად მცირე განზომილების სხეულს, რომლის მოძრაობაც სავსებით შესაძლებელია იქნეს განხილული მისი ნებისმიერი წერტილის მოძრაობით.

მატერიალურ წერტილთა სისტემა ეწოდებს წერტილთა ისეთ ერთობლიობას, რომელთა თითოეული წერტილის მოძრაობა და მდებარეობა დამოკიდებულია ყველა დანარჩენის მოძრაობასა და მდებარეობაზე.

მყარი სხეული ეწოდება წერტილთა ისეთ სიტემას რომლის ნებისმიერ ორ წერტილს შორის მანძილი არ იცვლება.

ძალა მექანიკაში წარმოადგენს სხეულთა ურთიერთქმედების შედეგს. ძალის სიდიდე გამოხატავს სხეულთა მექანიკური ურთიერთქმედების ზომას.

ერთ წრფეზე მდებარე ძალებს, რომელთაც ერთნაირი სიდიდე და საწინააღმდეგო მიმართულება აქვთ პირდაპირ თანაწინააღმდეგი ძალები.

ვიტყვით, რომ ძძალთა ორი სისტემა ტოლფასია, თუ ისინი ერთი და იგივე პირობებში ერთიდაიგივე მექანიკურ მოქმედებებს ახდენენ სხეულზე.

ვიტყვით, რომ ძალთა სისტემა ტოლფასია ნულის, თუ ისინი არავითარ მოქმედებას არ ახდენენ სხეულზე. ე.ი. ძალთა ასეთი სისტემა შეიძლება მოვდოთ ან მოვაშოროთ სხეულს ისე, რომ ამ დროს სხეულის მექანიკური მდგომარეობა არ შეიძვლება.

ძალას, რომელიც რაიმე ძალთა სისტემის ტოლფასია ეწოდება ამ ძალთა სისტემის ტოლქმედი.

სტატიკა დამყარებულია რამდენიმე ძირითად პრინციპზე, რომელთაც ვღებულობთ დაუმტკიცებლად:

1. ძალას აქვს გარკვეული სიდიდე, მიმართულება და მოდების წერტილი, ე.ი. ძალა დაბმული ვექტორია (მაგრამ, შემდგომში ვაჩვენებთ, რომ იგი სრიალა ვექტორია);

2. ერთ წერტილში მოდებული ძალთა სისტემა ტოლფასია ერთი ძალის, რომელიც იმავე წერტილშია მოდებული და რომელიც ამ ძალების გეომეტრიულ ჯამს წარმოადგენს (ტოლქმედი ძალა);

3. თავისუფალი მატერიალური წერტილის წონასწორობისათვის აუცილებელი და საკმარისია მასზე მოქმედი ძალების ტოლქმედი იყოს ნულის ტოლი. თავისუფალი მატერიალური წერტილები ეწოდება ისეთ წერტილებს, რომელთა მოძრაობა სივრცეში არავითარი პირობებით არ არის შეზღუდული. არათავისუფალი მატერიალური წერტილები ეწოდებათ ისეთ წერტილებს, რომელთა მოძრაობა შეზღუდულია რაიმე (გეომეტრიული) პირობებით (მაგალითად, ბუურთულა, რომელიც მოძრაობს სფეროს ზედაპირზე). იმ პირობებს, რომლებიც ზღუდავენ მატერიალურ წერტილთა გადაადგილებებს ეწოდებათ ბმები;

4. ყოველი ბმის მექანიკური მოქმედება სხეულზე ტოლფასია გარკვეული ძალის, რომელსაც რეაქციის ძალას უწოდებენ.

ყოველი არათავისუფალი წერტილი (სხეული) შეგვიძლია გავხადოთ თავისუფალი, თუ მას მოვაშორებ ბმას და სამაგიეროდ მოვდებთ რეაქციის ძალას. რეაქციის ძალა მიმართულია იმ მიმართულების საწინააღმდეგოდ რომელი მიმართულებითაც წერტილის გადაადგილება არ შეიცვლება.

არათავისუფალი მატერიალური წერტილის წონასწორობისთვის აუცილებელი და საკმარისია მასზე უშუალოდ მოქმედი ძალებისა და რეაქციის ძალების ტოლქმედი იყოს ნულის ტოლი.

ვთქვათ, თავისუფალ მატერიალურ წერტილზე მოქმედი ძალებია $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$, მაშინ წონასწორობის პირობა იქნება: $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n = 0$.

არათავისუფალი მატერიალური წერტილის შემთხვევაში კი წონასწორობის პირობა იქნება: $\vec{F} + \vec{R} = 0$, სადაც $\vec{F}$ უშუალოდ მოქმედი ძალებია, $\vec{R}$ რეაქციის ძალაა;

5. ორი მატერიალური წერტილი ერთმანეთზე მოქმედებს ძალით, რომლებიც სიდიდით ტოლია და მიმართულებით საწინააღმდეგო;

6. მატერიალურ წერტილზე (მყარ სხეულზე), თუ მოდებულია ორი პირდაპირ თანაწინააღმდეგი ძალა, მაშინ წერტილის (სხეულის) მექანიკური მოძრაობა არ იცვლება, ე.ი., პირდაპირ თანაწინააღმდეგი ძალები ნულის ტოლფასია;

7. თუ მატერიალურ წერტილზე (მყარ სხეულზე) მოქმედებს ორი ალა, მაშინ წერტილის (სხეულის) წონასწორობისათვის აუცილებელი და საკმარისია ეს ძალები იყვნენ პირდაპირ თანაწინააღმდეგი ძალები.

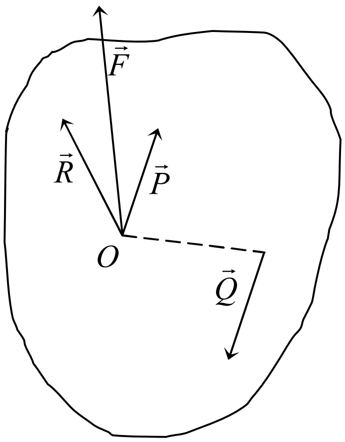
ძალა სრიალა ვექტორია, ამიტომ ყველა დებულება, რომელიც სამართლიანია სრიალა ვექტორებისთვის სამართლიანია ძალებისთვისაც (იხილეთ ქვემოთ დამატება 1).

## 3. სტატიკის ძირითადი დებულება

**დებულება.** თავისუფლი მყარი სხეულის წონასწორობისათვის აუცილებელი და საკმარისია, რომ მასზე მოქმედი ყველა ძალების ნაკრები ვექტორი და ნაკრები მომენტი მყარი სხეულის ნებისმიერი წერტილის მიმართ იყოს ნულის ტოლი:

$$\begin{aligned} \vec{R} &= 0, \\ \vec{L} &= 0, \end{aligned} \tag{3.1}$$

სადაც $\vec{R}$ არის მყარ სხეულზე მოქმედ ძალთა ნაკრები ვექტორი; $\vec{L}$-ნაკრები მომენტი ნებისმიერი წერტილის მიმართ.




**ნახაზი 3.1**

**დამტკიცება**. მოცემული ძალთა სისტემა დავიყვანოთ მყარრი სხეულის რაიმე $O$ წერტილის მიმართ, მივიღებთ ერთ $\vec{R}$ ძალას და $(\vec{P},\vec{Q})$ წყვილძალას. ტოლფასობის შეუზღუდავად შეგვიძლია მოვახერხოთ ისე, რომ წყვილძალის ერთ-ერთი ძალა მოვდოთ $O$ წერტილში (იხ. ნახ. 3.1).

აუცილებლობა. ვთქვათ, სხეული წონასწორობაშია, ვაჩვენოთ, რომ ადგილი აქვს (3.1) ტოლობებს. შევკრიბოთ $O$ წერტილზე მოდებული ძალები. მივიღებთ ახალ, ამ ორი ძალის ტოლქმედ ძალას

$$\vec{F} = \vec{R} + \vec{P}. \tag{3.2}$$

მყარ სხეულზე მოდებული დაგვრჩა ორი $\vec{F}$ და $\vec{Q}$ ძალა. რადგან სხეული წონასწორობაშია, ამიტომ ეს ორი ძალა წარმოადგენს პირდაპირ თანაწინააღმდეგ ძალებს. სტატიკის მე-6 პრინციპის საფუძველზე გვაქვს $\vec{F} + \vec{Q} = 0$ ე.ი.,

$$\vec{R} + \vec{P} + \vec{Q} = 0.$$

$\vec{P}$ და $\vec{Q}$ წყივძალის შემადგენელი ძალებია და ამგვარად $\vec{R} = 0$.

ვაჩვენოთ, რომ $\vec{L} = 0$.

თუ გავითვალისწინებთ იმას, რომ $\vec{F}$ და $\vec{Q}$ პირდაპირთანაწინააღმდეგი ძალებია, ამიტომ მათი მხარიც და მომენტიც იქნება ნულის ტოლი ე.ი., $\vec{L} = 0$.

აუცილებლობა დამტკიცებულია.

საკმერისობა. ვთქვათ, სრულდება (3.1) ტოლობები და ვაჩვენოთ, რომ სხეული წონასწორობაშია. რადგან $\vec{R} = 0$ აქედან გამომდინარეობს, რომ მოცემულ ძალთა სისტემა მიიყვანება მხოლოდ ერთ წყილძალამდე, რომლის მომენტიც ნულია და წყვილძალის შემადგენელი ძალები პირდაპირ თანაწინააღმდეგ ძალებს წარმოადგენენ. სტატიკის მე-7 პრინციპის საფუძველზე ეს ძალები წონასწორობაშია.

## 4. ძალთა სისტემის ინვარიანტები. ტოლქმედის არსებობის პირობა

ინინვარიანტული სიდიდე რაიმე ოპერაციის მიმართ ეწოდება ისეთ, სიდიდეს, რომელიც ამ ოპერაციის მიმართ მნიშვნელობას არ იცვლის.

ძალთა სისტემის რამდენიმე ინვარიანტი არსებობს დაყვანის ცენტრის მიმართ. ასეთი ინვარიანტებია: 1) ძალთა სისტემის ნაკრები ვექტორი

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_1 \ ;$$

2) ძალთა სისტემის ნაკრები ვექტორის და ნაკრები მომენტის სკალარული ნამრავლი

$$\left(\vec{R}, \vec{L}\right);$$

3) ნაკრები მომენტის გეგმილი ნაკრებ ვექტორზე $\text{გეგ}_{\vec{R}}\vec{L}$.

**დებულება.** თუ ძალთა სისტემის ნაკრები ვექტორი არანულოვანია, მაშინ აუცილებელი და საკმარისი პირობზა იმისა, რომ ძალთა სისტემა დაიყვანებოდეს ტოლქმედამდე მდგომარეობს იმაში, რომ მეორე ინვარიანტი იყოს ნულის ტოლი.

# კინემატიკა

## 5. წერტილის მოძრაობის განტოლებები

ვიგულისხმოთ, რომ მოძრავი $M$ წერტილის რადიუს ვექტორი არის $\overrightarrow{OM}$ :

$$\vec{r} = \vec{r}(t) . \tag{5.1}$$

თუ დროის ყოველ წერტილში მოცემული იქნება $\vec{r}$ რადიუს ვექტორი, მაშინ ცნობილი იქნება $M$ მატერიალური წერტილის მოძრაობა. (5.1) წარმოადგენს მატერიალური წერტილის მოძრაობის განტოლებას. (5.1)-ის დაგეგმილებით საკოოდინატო ღერძებძე მივიღებთ

$$x = x(t), \;\; y = y(t), \quad z = z(t). \tag{5.2}$$

(5.2) წარმოადგენს მატერიალური წერტილის მოძრაობის განტოლებებს პარამეტრული სახით.

ვიგულისხმოთ, რომ $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ ფუნქციები უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციებია.

იმ წირს, რომელზეც დროის ყოველ მომენტში იმყოფება მოძრავი მატერიალური $M$ წერტილი ეწოდება მოძრაობის ტრაექტორია.

მოძრაობის ტრაექტორიის განტოლება მიიღება (5.2) განტოლებებიდან $t$ პარამეტრის გამორიცხვით:

$$f_1(x, y, z) = 0,$$
$$f_2(x, y, z) = 0.$$

ვთქვათ, მატერიალური წერტილი მოძრაობს რაიმე წირზე. ავიღოთ წირზე დადებითი მიმართულება. ვთქვათ, საწყის მომენტში წერტილი იმყოფება $M_0$ წერტილში, ხოლო რაღაც დროის შემდეგ $M$ წერტილში. $\overset{\smile}{M_0 M}$ რკალის სიგრძე ავღნიშნოთ $S$. მას ვუწოდებთ ბუნებრივ განტოლებას თუ დროის ყოველ მომენტში განსაზღვრული გვექნება

$$S = S(t)$$

ფუნქცია. ეს სავსებით დაახასიათებს წირზე $M$-ის მოძრაობას. ვიგულისხმებთ, რომ $S(t)$ ფუნქცია უწყვეტია და გააჩნია უწყვეტი წარმოებულები მეორე რიგის ჩათვლით.

## 6. სკალარული სიჩქარე და აჩქარება

ვთქვათ, წერტილი მოძრაობს წირზე, რაღაც $t$ მომენტში მის მიერ გავლილი რკალის სიგრძე იყოს $S(t)$, ხოლო $\Delta t$ დროის შემდეგ შესაბამისი რკალის სიგრძე იქნება $\Delta S$.

შეფარდებას $\dfrac{\Delta S}{\Delta t}$ ეწოდება $M$ წერტილის საშუალო სკალარული სიჩქარე, ხოლო $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta S}{\Delta t}$ სიდიდეს ეწოდება $M$ წერტილის სკალარული სიჩქარე $t$ მომენტში, ე.ი.,

$$\mathrm{v} := \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt}. \tag{6.1}$$

თუ სკალარული სიჩქარე მუდმივია, მაშინ მოძრაობას ეწოდება თანაბარი მოძრაობა.

ამ შემთხვევაში (6.1)-დან მივიღებთ

$$S = \mathrm{v}\,t + const\,. \tag{6.2}$$

ვთქვათ, გვაქვს შემდეგი საწყისი პირობები:

$$S = S_0, \quad \text{როცა} \quad t = t_0. \tag{6.3}$$

(6.2), (6.3) ამოცანის ამონახსნი ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$S - S_0 = \mathrm{v}(t - t_0)\,. \tag{6.4}$$

(6.4) წარმოადგენს მატერიალური წერტილის მოძრაობის ბუნებრივ განტოლებას თანაბარი მოძრაობისას.

ვთქვათ, დროის $t$ მომენტში სკალარული სიჩქარეა $\mathrm{v}$, $\Delta t$ დროის შემდეგ იქნება $\Delta\,\mathrm{v}$.

შეფარდებას $\dfrac{\Delta\,\mathrm{v}}{\Delta t}$ ეწოდება $M$ წერტილის საშუალო სკალარული აჩქარება, ხოლო $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\,\mathrm{v}}{\Delta t}$, ეწოდება წერტილის სკალარული აჩქარება დროის $t$ მომენტში

$$w := \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\,\mathrm{v}}{\Delta t} = \frac{d\,\mathrm{v}}{dt} = \frac{d^2 S}{dt^2}\,.$$

თუ აჩქარება მუდმივია დროის ყოველ მომენტში, მაშინ ასეთ მოძრაობას თანაბრად ცვლადი მოძრაობა ეწოდება.

## დამატება 1

### სრიალა ვექტორი. მისი მომენტი წერტილსა და ღერძის მიმართ

სრიალა ვექტორი ეწოდება ისეთ ვექტორს, რომლის დამახასიათებელ ელემენტება ითვლება სიგრძე, მიმართულება და ფუძე (ის წრფე, რომელზედაც ვექტორია მოთავსებული), ხოლო ფუძეზე ვექტორის მდებარეობას არავითარი მნიშვნელობა არა აქვს (ვექტორის ფიზიკური აზრი არ შეიცვლება, თუ ვექტორს გავასრიალებთ ფუძის გასწვრივ). ორ ვექტორს, რომელთაც ეს 3 თვისება ერთნაირი აქვთ ეკვივალენტური ეწოდება. სრიალა ვექტორის მაგალითს წარმოადგენს მყარ სხეულზე მოდებული ძალა.

განვიხილოთ სრიალა $\vec{\mathbf{A}}$ ვექტორი და სივრცის ნებისმიერი $O$ წერტილი. აღვნიშნოთ $\vec{\mathbf{r}}$-ით $\vec{\mathbf{A}}$ ვექტორის სათავის (მოდების წერტილის) რადიუს-ვექტორი $O$ წერტილის მიმართ (ნახ. 1). ვექტორულ ნამრავლს[1]

$$\vec{\mathbf{L}} = [\vec{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathbf{A}}],$$

(ვთვლით, რომ $\vec{\mathbf{r}}, \vec{\mathbf{A}}$ და $\vec{\mathbf{L}}$ ვეტქორები ქმნიან მარჯვენა სამეულს), რომელიც მოდებულია $O$ წერტილზე ეწოდება $\vec{\mathbf{A}}$ ვექტორის მომენტი $O$ წერტილის მიმართ.

$$|\vec{\mathbf{L}}| = |\vec{\mathbf{r}}||\vec{\mathbf{A}}|\sin(\vec{\mathbf{r}}, \vec{\mathbf{A}}),$$

---

[1] $\vec{x}$ და $\vec{\Phi}$ ვექტორების ვექტორული ნამრავლი აღინიშნება $\left[\vec{x}, \vec{\Phi}\right]$ სიმბოლოთი, რომლის მოდული (სიგრძე) გამოითვლება

$$\left|\left[\vec{x}, \vec{\Phi}\right]\right| = |\vec{x}||\vec{\Phi}|\sin\left(\vec{x}, \hat{\ } \vec{\Phi}\right)$$

ფორმულით, სადაც $\left(\vec{x}, \hat{\ } \vec{\Phi}\right)$ უმცირესი კუთხეა $\vec{x}$ და $\vec{\Phi}$ ვექტორებს შორის, ამასთან $\vec{x}$, $\vec{\Phi}$ და $[\vec{x}, \vec{\Phi}]$ ვექტორები ქმნიან მარჯვენა სამეულს და $\left[\vec{x}, \vec{\Phi}\right]$ ორთოგონალურია, როგორც $\vec{x}$, ასევე $\vec{\Phi}$ ვექტორის მიმართ. ფორმალურად, თუ $\vec{x} := (x_1, x_2, x_3)$ და $\vec{\Phi} := (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$ ვექტორები მოცემულია დეკარტის მართკუთხა კოორდინნატებით, მაშინ ვექტორული ნამრავლი შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი "დეტერმინანტის" სახით:

$$\left[\vec{x}, \vec{\Phi}\right] = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 \end{vmatrix} = \in_{ijk} \vec{e}_i x_j \Phi_k,$$

სადაც $\in_{ijk} = \dfrac{1}{2}(i-j)(j-k)(k-i)$ ლევი-ჩივიტას სიმბოლოა.

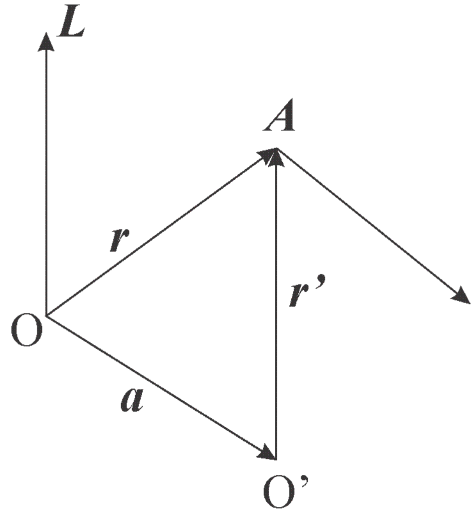
$\vec{x}$ და $\vec{\Phi}$ ვექტორების სკალარული ნამრავლი განიმარტება

$$\left(\vec{x}, \vec{\Phi}\right) := |\vec{x}||\vec{\Phi}| \cos(\vec{x}, \hat{\ } \vec{\Phi}) = \sum_{i=1}^{3} x_i \Phi_i.$$

ტოლობით.

$$|\mathbf{L}| = |\mathbf{A}|h,$$

$h$ აღნიშნავს $O$ წერტილიდან $\vec{\mathbf{A}}$ ვექტორის ფუძეზე დაშვებული მართობის სიგრძეს.



ნახაზი 1

$O$ წერტილს ეწოდება მომენტის ცენტრი, ხოლო $h$ -ს ვექტორის მხარი $O$ წერტილის მიმართ. $\vec{\mathbf{A}}$ ვექტორის მომენტი $O$ წერტილის მიმართ არ შეიცვლება, თუ ვექტორს ნებისმიერად გავასრიალებთ ფუძის გასწვრივ. თუ შემოვიღებთ შემდეგ აღნიშვნებს:

$\vec{\mathbf{A}} := (A_1, A_2, A_3)$, $\quad \vec{\mathbf{r}} := (x_1, x_2, x_3)$, $\quad \vec{\mathbf{L}} := (L_1, L_2, L_3)$,

მაშინ

$$L_1 = x_2 A_3 - x_3 A_2,$$
$$L_2 = x_3 A_1 - x_1 A_3,$$
$$L_3 = x_1 A_2 - x_2 A_1.$$

$\vec{\mathbf{A}}$ ვექტორის მომენტი ახალი $O'$ წერტილის მიმართ აღვნიშნოთ $\vec{\mathbf{L}}'$

$$\vec{\mathbf{L}}' = [\vec{\mathbf{r}}' \cdot \vec{\mathbf{A}}],$$

სადაც $\vec{\mathbf{r}}'$ წარმოადგენს $\vec{\mathbf{A}}$ ვექტორისათვის რადიუს-ვექტორს $O'$ ცენტრის მიმართ. ცხადია გვექნება (ნახ. 1)

$$\vec{\mathbf{r}}' = \vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{a}},$$

სადაც $\vec{\mathbf{a}} = \overrightarrow{OO'}$.

უკანასკნელი ტოლობის ძალით მივიღებთ

$$\vec{\mathbf{L}}' = \vec{\mathbf{L}} - [\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{A}}].$$

ცხადია, რომ $[\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{A}}]$ ვექტორი წარმოადგენს $O'$ წერტილზე მოდებული $\vec{\mathbf{A}}$ ვექტორის მომენტს $O$ წერტილის მიმართ, ამიტომ უკანასკნელი ტოლობის ძალით, ადვილად დავრწმუნდებით შემდეგი დებულების სამართლიანობაში.

**დებულება.** ახალი ცენტრის მიმართ ვექტორის მომენტი უდრის ძველი ცენტრის მიმართ მომენტს გამოკლებული ახალ ცენტრზე მოდებული ამავე ვექტორის მომენტი ძველი ცენტრის მიმართ.

$\vec{\mathbf{A}}$ ვექტორის მომენტი რაიმე ღერძის მიმართ ეწოდება ამ ღერძის ნებისმიერი წერტილის მიმართ $\vec{\mathbf{A}}$ ვექტორის მომენტის გეგმილს ამავე ღერძზე.

## ნაკრები ვექტორი და ნაკრები მომენტი

განვიხილოთ ახლა სრიალა ვექტორთა სასრული რაოდენობა, რომელთაც შემდეგში სრიალა ვექტორთა სისტემას ვუწოდებთ. ამ ვექტორთა გეომეტრიულ ჯამს

$$\vec{\mathbf{R}} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{A}_i \, , \tag{1}$$

ეწოდება აღებული სისტემის ნაკრები ვექტორი (მთავარი ვექტორი).
აღვნიშნოთ ახლა სივრცის რაიმე $O$ წერტილის მიმართ $\mathbf{A}_i$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ ვექტორის მომენტი $\mathbf{L}_i$ -ით. ამ მომენტების გეომეტრიულ ჯამს

$$\vec{\mathbf{L}} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{L}_i = \sum_{i=1}^{n} [\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{A}_i], \tag{2}$$

ეწოდება აღებილი სისტემის ნაკრები მომენტი (მთავარი მომენტი) $O$ წერტილის მიმართ. განმარტების ძალით ნაკრები ვექტორი არ არის დამოკიდებული $O$ წერტილის შერჩევაზე, ნაკრები მომენტი მასზე არის დამოკიდებული.

აღვნიშნოთ ნაკრები მომენტი ახალი ცენტრის მიმართ

$$\vec{\mathbf{L}}' = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{L}'_i \, , \tag{3}$$

ამრიგად, ჩვენ მივიღებთ, რომ

$$\vec{\mathbf{L}}' = \sum_{i=1}^{n} \left( \mathbf{L}_i - [\mathbf{a} \cdot \mathbf{A}_i] \right) = \vec{\mathbf{L}} - \left[ \vec{\mathbf{a}} \cdot \sum_{i=1}^{n} \mathbf{A}_i \right] = \vec{\mathbf{L}} - \left[ \vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{R}} \right] \tag{4}$$

ე.ი., ახლი ცენტრის მიმართ ნაკრები მომენტი უდრის ძველი ცენტრის მიმართ ნაკრებ მომენტს გამოკლებული ახალ ცენტრზე მოდებული ნაკრები ვექტორის მომენტი ძველი ცენტრის მიმართ.

ნაკრები მომენტი დამოუკიდებელია მომენტთა ცენტრისაგან მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ნაკრები ვექტორი ნულის ტოლია.

ვთქვათ ახლა, სრიალა ვექტორთა ფუძეები ერთ წერტილში იკვეთება. ასეთ სისტემას თავმოყრილ ვექტორთა სისტემა ეწოდება. ვინაიდან მოცემული სისტემა სრიალა ვექტორთა სისტემას წარმოადგენს, ამიტომ შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ ყველა ვექტორი თავმოყრის $\mathbf{M}$ წერტილშია მოდებული. თუ ახლა აღებული სისტემის ნაკრებ მომენტს სივრცის რაიმე $O$ წერტილის მიმართ აღვნიშნავთ $\vec{\mathbf{L}}$ -ით, მივიღებთ:

$$\vec{\mathbf{L}} = \sum_{i=1}^{n} [\vec{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}_i] = \left[ \vec{\mathbf{r}} \cdot \sum_{i=1}^{n} \mathbf{A}_i \right] = \left[ \vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{R}} \right],$$

სადაც $\vec{\mathbf{r}}$ აღნიშნავს $M$ წერტილის რადიუს-ვექტორს მომენტთა $O$ ცენტრის მიმართ.
**ვარინიონის დებულება:** თავმოყრილ ვექტორთა სისტემის ნაკრები მომენტი რაიმე წერტილის მიმართ უდრის ამ სისტემის ნაკრები ვექტორის მომენტს ამავე წერტილის

მიმართ, თუ ვიგულისხმებთ, რომ ნაკრები ვექტორი თავმოყრის წერტილშია მოდებული.

## ელემენტარული მოქმედებები. ტოლფასი სისტემები

შემდეგში ჩვენ ხშირად დაგვჭირდება შემდეგი მოქმედებები:

1. ვექტორის გასრიალება ფუძის გასწვრივ
2. თავმოყრილი ვეტორების შეკრება
3. ვექტორის დაშლა თავმოყრილ ვექტორებად

ამ მოქმედებებს ელემენტარული მოქმედებები ეწოდება.

ვთქვათ, მოცემულია სრიალა ვექტორთა ორი სისტემა $\vec{\mathbf{A}}_1, \vec{\mathbf{A}}_2, ..., \vec{\mathbf{A}}_n$ და $\vec{\mathbf{B}}_1, \vec{\mathbf{B}}_2, ..., \vec{\mathbf{B}}_k$, რომელთაც სიმოკლისათვის ასე აღვნიშნავთ: $(A)$ $(B)$. ვიტყვით, რომ სრიალა ვექტორთა ეს ორი სისტემა ტოლფასია, თუ ისინი ერთმანეთზე დაიყვანება ელემენტარული მოქმედებებით. თუ $(A)$ და $(B)$ სისტემა ცალ-ცალკე მესამე სისტემის ტოლფასია, მაშინ ისინი ერთმანეთის ტოლფასია.

წინა პარაგრაფში დამტკიცებული დებულების ძალით, ადვილად დავასკვნით, რომ სრიალა ვექტორთა სისტემის ნაკრები ვექტორი და ნაკრები მომენტი ინვარიანტულია ელემენტარული მოქმედებების მიმართ (ელემენტარული მოქმედებები არ ცვლის სისტემის ნაკრებ ვექტორსა და ნაკრებ მომენტს). ამიტომ ორ ტოლფას $(A)$ და $(B)$ სისტემას ერთნაირი ნაკრები ვექტორი და ნაკრები მომენტი აქვს.

თუ არსებობს ისეთი ვექტორი $\vec{\mathbf{R}}$, რომელიც მოცემული სისტემის ტოლფასია, მაშინ $\vec{\mathbf{R}}$ ვექტორს ეწოდება ამ სისტემის ტოლქმედი.

ამ განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ თავმოყრილ ვექტორთა სისტემისათვის ყოველთვის არსებობს ტოლქმედი. ის უდრის აღებული სისტემის ნაკრებ ვექტორს და თავმოყრის წერტილშია მოდებული (რა თქმა უნდა, იგი, როგორც სრიალა ვექტორი, შეიძლება გადავიტანოთ თავისი ფუძის გასწვრივ). პირდაპირ თანაწინააღმდეგ ვექტორთა ტოლქმედი ნულის ტოლია.

ვთქვათ ახლა, სრიალა ვექტორთა სისტემა შედგება ორი პარალელური ერთხმრივად მოგეზული $\vec{\mathbf{A}}$ და $\vec{\mathbf{B}}$ ვექტორებისაგან. ვაჩვენოთ, რომ ასეთი სისტემის ტოლქმედი არსებობს. $\vec{\mathbf{A}}$ და $\vec{\mathbf{B}}$ ვექტორების მოდების წერტილები იყოს $M$ და $N$. ჩვენ სისტემას დავუმატოთ $M$ და $N$ წერტილებზე მოდებული $\vec{\mathbf{C}}$ და $-\vec{\mathbf{C}}$ ვექტორები, რომელნიც $MN$ მონაკვეთის პარალელური არიან და რომელთა სიგრძეც ნებისმიერად არის აღებული (ნახ. 3). შევკრიბოთ ახლა $M$ წერტილზე მოდებული $\vec{\mathbf{A}}$ და $\vec{\mathbf{C}}$ ვექტორები, აგრეთვე $N$ წერტილზე მოდებული $\vec{\mathbf{B}}$ და $-\vec{\mathbf{C}}$ ვექტორები მივიღებთ შესაბამისად

$\vec{\mathbf{P}}_1$ და $\vec{\mathbf{P}}_2$ ვექტორებს. გავასრიალოთ ეს ვექტორები ფუძის გასწვრივ და მოვდოთ ისინი ფუძეთა გადაკვეთის $D$ წერტილზე. შევკრიბოთ ახლა $D$ წერტილზე მოდებული $\vec{\mathbf{P}}_1$ და $\vec{\mathbf{P}}_2$ ვექტორები, მივიღებთ ერთ $\vec{\mathbf{R}}$ ვექტორს. გავასრიალოთ $\vec{\mathbf{R}}$ ვექტორი და მივდოთ ის იმ $E$ წერტილზე, სადაც $\vec{\mathbf{R}}$ ვექტორის ფუძე კვეთს $MN$ მონაკვეთს. ცხადია, $\vec{\mathbf{R}}$ ვექტორი ტოლფასია აღებული პარალელური ვექტორების და, მაშასადამე, მათ ტოლქმედს წარმოადგენს. ამის გარდა, ცხადია, რომ

$$\vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{P}}_1 + \vec{\mathbf{P}}_2 = \vec{\mathbf{C}} + \vec{\mathbf{A}} + (-\vec{\mathbf{C}}) + \vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}}\,.$$

I და II სამკუთხედების მსგავსებიდან

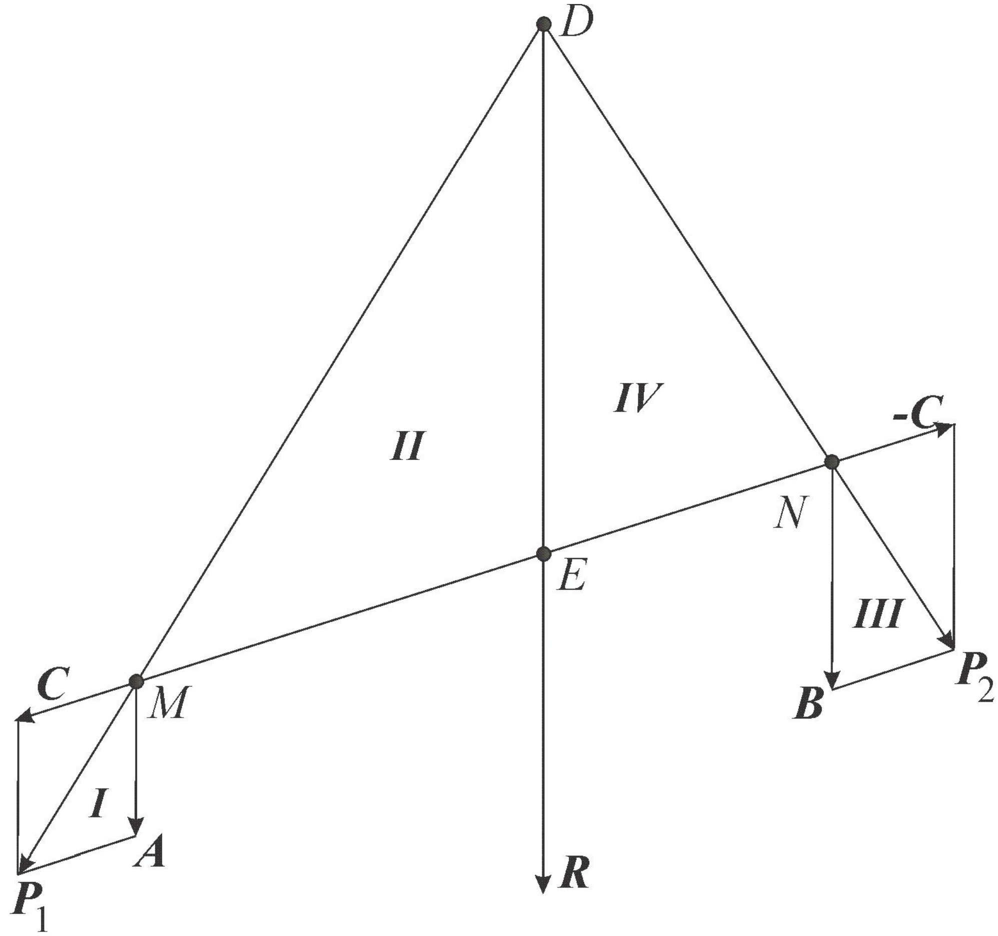
$$\frac{DE}{|A|} = \frac{ME}{|C|}\,.$$

III და IV სამკუთხედების მსგავსებიდან

$$\frac{|B|}{DE} = \frac{|C|}{NE}\,.$$

ორ უკანასკნელ ტოლობათა გადამრავლებით მივიღებთ:

$$\frac{|B|}{|A|} = \frac{ME}{EN}\,. \tag{5}$$




ნახაზი 3

ამრიგად, ერთმხრივ მოგეზული ორი პარალელური ვექტორი, ტოლფასია ერთი ვექტორისა, რომელიც აღებული ვექტორების ჯამის ტოლია; მისი მოდების წერტილის დაშორება აღებული ვექტორების მოდების წერტილიდან, ვექტორთა სიდიდეების უკუპროპორციულია.

ცხადია, $E$ წერტილის მდებარეობა არ შეიცვლება, თუ $\vec{\mathbf{A}}$ და $\vec{\mathbf{B}}$ ვექტორებს ნებისმიერად მოვაბრუნებთ მოდების წერტილების შემდეგაც დარჩნენ პარალელურად და ერთმხრივ მოგეზული.

ზემოთ მოყვანილი მსჯელობიდან ცხადია, რომ ნებისმიერი სრიალა ვექტორი მისი ტოლფასი ორი ერთმხრივ მოგეზული პარალელური ვეტქორით შეიძლება შეიცვალოს. ამასთან, თუ ხსენებული პარალელური ვექტორებიდან ერთ-ერთი წინასწარ მოცემულია, მეორე ცალსახად განისაზღვრება.

განვიხილოთ ახლა სხვადასხვა მხრივ მოგეზული პარალელური $\vec{\mathbf{A}}$ და $\vec{\mathbf{B}}$ ვექტორები. ვიგუსიხმოთ, რომ მათი ნაკრები ვექტორი არ უდრის ნულს, დავუშვათ $|\mathbf{A}| < |\mathbf{B}|$. ვისარგებლოთ ახლა ზემოთნათქვამით და დავშალოთ $\vec{\mathbf{B}}$ ვექტორი ერთმხრივ მიმართულ ორ პარალელურ ვექტორად. ამასთან, ერთი შესაკრები იყოს $M$ წერტილზე მოდებული $-\vec{\mathbf{A}}$ ვექტორი, მაშინ, როგორც ავღნიშნეთ, მეორე შესაკრები ცალსახად განისაძღვრება. ეს შესაკრები იქნება $\vec{\mathbf{A}}+\vec{\mathbf{B}}$ ვეტქორი, რომლის მოდების $E$ წერტილი, ზემოთ ნათქვამის ძალით, შემდეგი ტოლობით განისაზღვრება:

$$\frac{MN}{NE} = \frac{|\mathbf{B}| - |\mathbf{A}|}{|\mathbf{A}|},$$

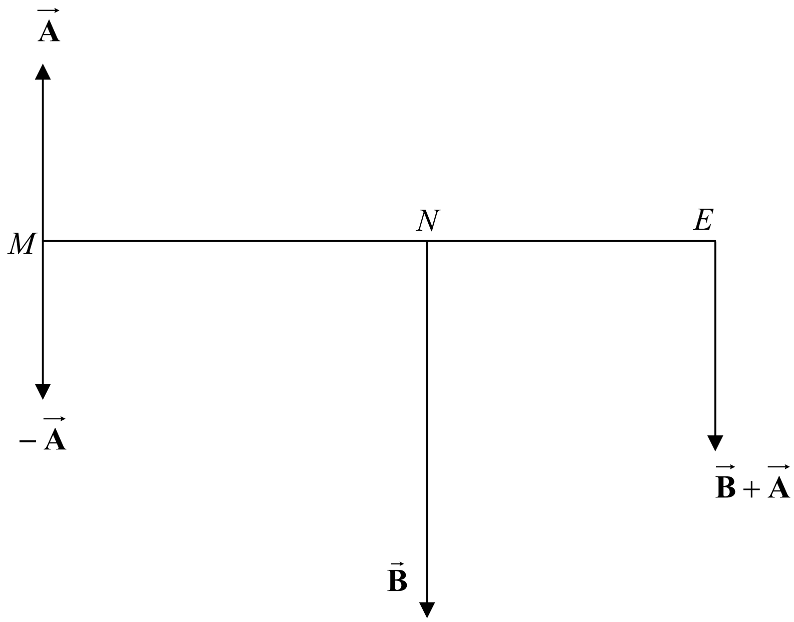
საიდანაც, პროპორციის ცნობილი თვქისების ძალით მივიღებთ:

$$\frac{MN + NE}{NE} = \frac{|\mathbf{B}| - |\mathbf{A}| + |\mathbf{A}|}{|\mathbf{A}|},$$

ანუ, რაც იგივეა

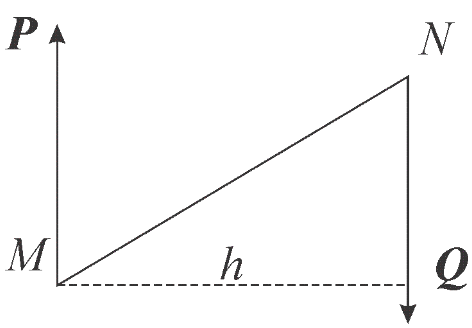
$$\frac{ME}{NE} = \frac{|\mathbf{B}|}{|\mathbf{A}|}, \tag{6}$$

მაგრამ $M$ წერტილზე მოდებული ორი პირდაპირ თანაწინააღმდეგი ვექტორი ნულის ტოლფასია და საბოლოოდ დაგვრჩება $E$ წერტილზე მოდებული $\vec{\mathbf{A}}+\vec{\mathbf{B}}$ ვექტორი, ე.ი., განსახილველ შემთხვევაში არსებობს ტოლქმედი.




ნახაზი 4

ამრიგად, სხვადასხვამხრივ მოგეზული სხვადასხვა სიგრძის ორი პარალელური ვექტორი ტოლფასია ერთი ვექტორისა, რომლის სიგრძე უდრის აღებული ვექტორების სიგრძეთა სხვაბას. მისი მიმართულება ემთხვევა უდიდესი სიგრძის ვექტორის მიმართულებას. ის მოდებულია $MN$ -ის გაგრძელებაზე უდიდესი სიგრძის ვექტორის მხარეს ისე, რომ მისი მოდების წერტილის დაშორება აღებული ვექტორების მოდების წერტილებიდან უკუპროპორციულია ვექტორების სიგრძის.




ნახაზი 5

(6) ტოლობიდან ცხადია, რომ $E$ წერტილის მდებარეობა არ შეიცვლება, თუ განსახილველ ვექტორებ ნებისმიერი კუთხით მოვაბრუნებთ მათი მოდების $M$ და $N$ წერტილების ირვლივ.

თუ ახლა მოცემულია რამდენიმე პარალელური ვექტორისაგან შემდგარი ისეთი სისტემა, რომლის ნაკრები ვექტორი ნულის ტოლი არ არის, მაშინ ზემონაჩვენები წესის მიმდევრობით გამოყენებით შეიძლება დავამტკიცოთ ტოლქმედის არსებობა და კიდევაც ვიპოვოთ ის.

(6) ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ როცა $|\mathbf{B}| \to |\mathbf{A}|$, მაშინ $E \to \infty$. ეს კი გვიჩვენებს, რომ სხვადასხვა მხრივ მოგეზულ ერთიდაიმავე სიგრძის პარალელურ ვექტორთა სისტემას არ აქვს ტოლქმედი. ასეთ პარალელურ ვექტორთა სისტემას ეწოდება წყვილვექტორი (ნახ. 5). წყვილვექტორის აღსანიშნავად შემდეგში ვიხმართ ასეთ სიმბოლოს $(\vec{\mathbf{P}}, \vec{\mathbf{Q}})$. განმარტების ძალით $\vec{\mathbf{P}} + \vec{\mathbf{Q}} = 0$.

## წყვილვექტორის თვისებები

ვინაიდან წყვილვექტორების ნაკრები ვექტორი ნულის ტოლია, ამიტომ წყვილვექტორის ნაკრები მომენტი, რომელსაც უბრალოდ წყვილვექტორის მომენტს უწოდებენ, დამოუკიდებელია მომენტთა ცენტრისაგან. მაშასადამე, წყვილვექტორის მომენტი თავისუფალი ვექტორია. წყვილვექტორის შემადგენელი ვექტორების ფუძეებს შორის მანძილს (რომელსაც $h$-ით ავღნიშნავთ) ეწოდება წყვილვექტორის მხარი, თუ წყვილვექტორის მომენტს $\vec{\mathbf{L}}$-ით აღვნიშნავთ, ხოლო ვექტორების მოდების წერტილებს $M$ და $N$-ით მივიღებთ:

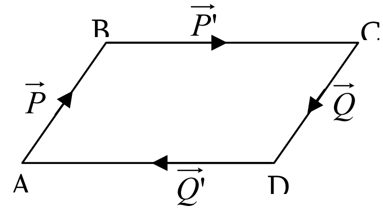
$$\vec{\mathbf{L}} = [\overrightarrow{\mathbf{NM}} \cdot \vec{\mathbf{P}}] = [\overrightarrow{\mathbf{MN}} \cdot \vec{\mathbf{Q}}], \qquad (7)$$

საიდანაც, ცხადია, გვექნება

$$|L| = |P|\, h, \qquad (8)$$

ამასთან $h$ წყვილვექტორის მხარია.

**დებულება 1.** ორი წყვილვექტორი, რომელთაც ერთნაირი მომენტი აქვთ, ტოლფასია.

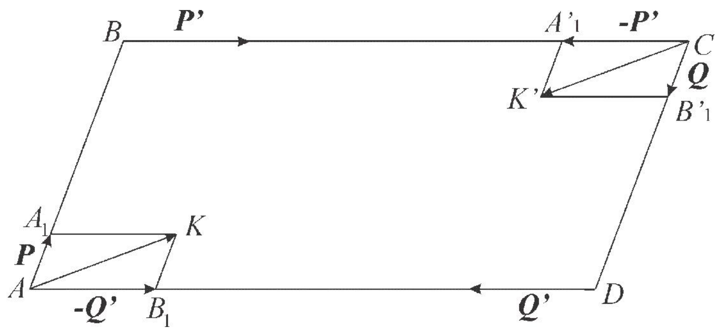



ნახაზი 6

ვთქვათ, მოცემულია ორი წყვილვექტორი $(\vec{\mathbf{P}}, \vec{\mathbf{Q}})$ და $(\vec{\mathbf{P}}', \vec{\mathbf{Q}}')$, რომელთაც, პირობის ძალით, ერთნაირი მომენტები აქვთ, ვაჩვენოთ, რონ ეს წყვილვექტორები ელემენტარული მოქმედებებით ერთიმეორეზე დაიყვანება. ვინაიდან წყვილვექტორის მომენტი მართობია წყვილვექტორის სიბრტყისა, ამიტომ, როგორც ადვილი მისახვედრია, $(\vec{\mathbf{P}}, \vec{\mathbf{Q}})$ და $(\vec{\mathbf{P}}', \vec{\mathbf{Q}}')$ წყვილვექტორების სიბრტყეები პარალელურია.

განვიხილოთ პირველად ის შემთხვევა, როცა ორივე წყვილვექტორი ერთ სიბრტყეშია მოთავსებული და პირველი წყვილვექტორის პარალელური არ არის. მაშინ ცხადია,

რომ წყვილვექტორთა შემადგენელი ვექტორების ფუძეების გადაკვეთის შედეგად მიიღება ABCD პარალელოგრამი (ნახ. 6).




ნახაზი 7

$\vec{\mathbf{P}},\vec{\mathbf{Q}}$, $\vec{\mathbf{P}}',\vec{\mathbf{Q}}'$ ვექტორების გასრიალებით ყოველთვის შეგვიძლია მივაღწიოთ იმას, რომ ისინი აღნიშნული პარალელოგრამის წვეროებზე იყვნენ მოდებული. წყვილვექტორთა მომენტების ტოლობის ძალით, ადვილად დავასკვნით, რომ $\vec{\mathbf{P}},\vec{\mathbf{Q}}$, $\vec{\mathbf{P}}',\vec{\mathbf{Q}}'$ ვექტორები ABCD პარალელოგრამის შიგა წერტილებს ერთი და იმავე გეზით უვლიან. ვაჩვენოთ ახლა, რომ $(\vec{\mathbf{P}},\vec{\mathbf{Q}})$ წყვილვექტორისაგან ელემენტარული მოქმედებებით მიიღება $(\vec{\mathbf{P}}',\vec{\mathbf{Q}}')$ წყვილვექტორი. ამისათვის წარმოვიდგინოთ, რომ გვაქვს მხოლოდ $(\vec{\mathbf{P}},\vec{\mathbf{Q}})$ წყვილვექტორი, რომელიც ABCD პარალელოგრამის მიმართ ისეა განლაგებული, როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ. მოვდოთ ABCD პარალელოგრამის B და C წვეროებზე $\vec{\mathbf{P}}'$ და $-\vec{\mathbf{P}}'$ პირდაპირ თანაწინააღმდეგი ვექტორები (ნახ. 7). მოვდოთ აგრეთვე ამავე პარალელოგრამის D და A წვეროებზე პირდაპირ თანაწინააღმდეგი $\vec{\mathbf{Q}}'$ და $-\vec{\mathbf{Q}}'$ ვექტორები. ამრიგად, ჩვენ მივიღებთ $\vec{\mathbf{P}}$, $\vec{\mathbf{Q}}$, $\vec{\mathbf{P}}'$, $\vec{\mathbf{Q}}'$, $-\vec{\mathbf{P}}'$, $-\vec{\mathbf{Q}}'$ ვექტორებისაგან შემდგარ სისტემას, რომელიც, ცხადია, $(\vec{\mathbf{P}},\vec{\mathbf{Q}})$ წყვილვექტორის ტოლფასია. შევკრიბოთ ახლა A წერტილზე მოდებული $\vec{\mathbf{P}}$ და $-\vec{\mathbf{Q}}'$ ვექტორები; შევკრიბოთ აგრეთვე C წერტილზე მოდებული $\vec{\mathbf{Q}}$ და $-\vec{\mathbf{P}}'$ ვექტორები. მივიღებთ $\overrightarrow{AK}$ და $\overrightarrow{CK'}$ ვექტორებს, რომელთაც ერთნაირი სიგრძე აქვთ. დავამტკიცოთ, რომ ეს ვექტორები დამთხვეულია ABCD პარალელოგრამის დიაგონალზე და, მაშასადამე, წარმოადგენენ პირდაპი თანაწინააღმდეგ ვექტორებს. უპირველეს ყოვლისა, შევნიშნოთ, რომ ვინაიდან წყვილვექტორთა მომენტები ტოლია, ამიტომ ადგილი აქვს ტოლობას (8) ფორმულა:

$$|P|h = |P'|h',$$

ანუ, რაც იგივეა

$$|AA_1|h = |AB_1|h', \tag{9}$$

სადაც $h$ და $h'$ აღნიშნავენ $(\vec{\mathbf{P}},\vec{\mathbf{Q}})$ და $(\vec{\mathbf{P}}',\vec{\mathbf{Q}}')$ წყვილვექტორთა მხრებს.

ცხადია, აგრეთვე, რომ ადგილი აქვს ტოლობას

$$|AB|h = |AD|h' \qquad (10)$$

(ვინაიდან ტოლობის ორივე მხარე ერთი და იმავე პარალელოგრამის ფართობს გამოსახავს). (9) ტოლობის (10) ტოლობაზე გაყოფით მივიღებთ:

$$\frac{|AA_1|}{|AB|} = \frac{|AB_1|}{|AD|}.$$

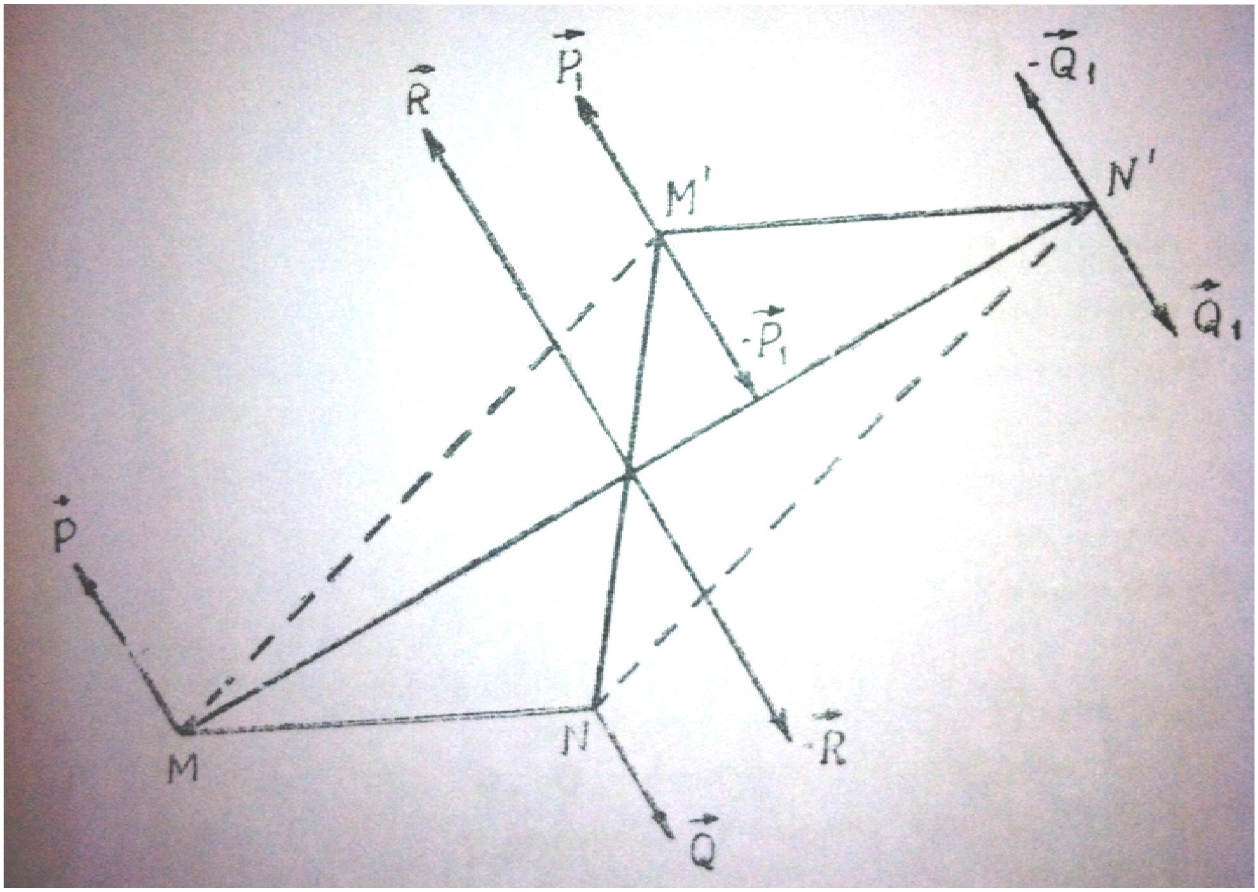
უკანასკნელი ტოლობა ამტკიცებს, რომ $AA_1KB_1$ პარალელოგრამი მსგავსია ABCD პარალელოგრამისა. ასევე შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ $CA_1'K'B_1'$ პარალელოგრამი იმავე ABCD პარალელოგრამის მსგავსია. ამის შემდეგ ცხადია, რომ $\overrightarrow{AK}$ და $\overrightarrow{CK'}$ ვექტორები დამთხვეულია ABCD პარალელოგრამის $AC$ დიაგონალზე, მაშასადამე, წარმოადგენენ პირდაპირ თანაწინააღმდეგ ვექტორებს. ვინაიდან პირდაპირ თანაწინააღმდეგი ვექტორები ნულის ტოლფასია, ამიტომ ზემოაღნიშნული 6 ვექტორიდან გვრჩება $(\vec{\mathbf{P}}',\vec{\mathbf{Q}}')$ წყვილვექტორი.

ვთქვათ ახლა $(\vec{\mathbf{P}},\vec{\mathbf{Q}})$ წყვილვექტორის შემადგენელი ვექტორები პარალელურია $(\vec{\mathbf{P}}',\vec{\mathbf{Q}}')$ წყვილვექტორის შემადგენელი ვექტორების. განვიხილოთ ახალი $(\vec{\mathbf{P}}'',\vec{\mathbf{Q}}'')$ წყვილვექტორი, რომელიც $(\vec{\mathbf{P}},\vec{\mathbf{Q}})$ წყვილვექტორის სიბრტყეშია მოთავსებული და რომლის შემადგენელი ვექტორებიც არ არის პარალელური $(\vec{\mathbf{P}},\vec{\mathbf{Q}})$ წყვილვექტორის შემადგენელი ვექტორების; ამასთან დავუშვათ, რომ $(\vec{\mathbf{P}}'',\vec{\mathbf{Q}}'')$ წყვილვექტორის მომენტი ტოლია $(\vec{\mathbf{P}},\vec{\mathbf{Q}})$ წყვილვექტორის მომენტის. ცხადია, ასეთი $(\vec{\mathbf{P}}'',\vec{\mathbf{Q}}'')$ წყვილვექტორის აღება ყოველთვის შეიძლება. ზემოდამტკიცებულის ძალით, $(\vec{\mathbf{P}},\vec{\mathbf{Q}})$ და $(\vec{\mathbf{P}}',\vec{\mathbf{Q}}')$ წყვილვექტორები ცალ-ცალკე $(\vec{\mathbf{P}}'',\vec{\mathbf{Q}}'')$ წყვილვექტორის ტოლფასია და, მაშასადამე, ისინი ერთიმეორის ტოლფასია.

ამრიგად, დებულება დამტკიცებულია იმ შემთხვევაში, როცა ორივე წყვილვექტორი ერთსა და იმავე სიბრტყეშია მოთავსებული.

დავამტკიცოთ ახლა დებულება იმ შემთხვევაში, როცა $(\vec{\mathbf{P}},\vec{\mathbf{Q}})$ და $(\vec{\mathbf{P}}',\vec{\mathbf{Q}}')$ წყვილვექტორთა სიბრტყეები პარალელურია. ცხადია, დებულება დამტკიცებული იქნება, თუ ვაჩვენებთ, რომ ელემენტარული მოქმედებებით წყვილვექტორი შეიძლება მის პარალელურ სიბრტყეში გადავიტანოთ.

$\vec{\mathbf{P}}$ და $\vec{\mathbf{Q}}$ ვექტორების მოდების წერტილები იყოს, როგორც ზემოთ, $M$ და $N$. განვიხილოთ $(\vec{\mathbf{P}}',\vec{\mathbf{Q}}')$ წყვილვექტორის სიბრტყეში $M'N'$ მონაკვეთი, რომელიც $MN$ მონაკვეთის პარალელურია და $|M'N'| = MN$ (ნახ. 8).



ნახაზი 8

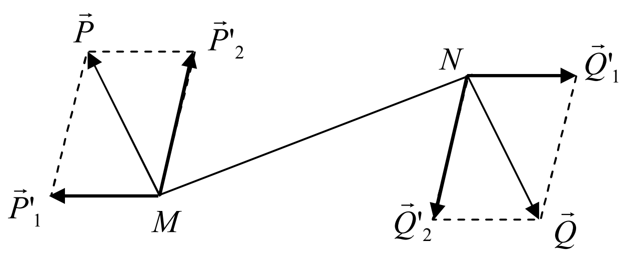
მოვდოთ ახლა $M'$ და $N'$ წერტილებზე პირდაპი თანაწინააღმდეგი $\vec{\mathbf{P}}_1$, $-\vec{\mathbf{P}}_1$ და $\vec{\mathbf{Q}}_1$, $-\vec{\mathbf{Q}}_1$ ვექტორები, სადაც $\vec{\mathbf{P}}_1=\vec{\mathbf{P}}$ , $\vec{\mathbf{Q}}_1=\vec{\mathbf{Q}}$. გვექნება 6 ვექტორისგან შემდგარი სისტემა, რომელიც, ცხადია, $(\vec{\mathbf{P}},\vec{\mathbf{Q}})$ წყვილვექტორის ტოლფასია. შევკრიბოთ ახლა $M$ და $N'$ წერტილებზე მოდებული $\vec{\mathbf{P}}$ და $-\vec{\mathbf{Q}}_1$ ერთმხრივ მოგეზული პარალელური ვექტორები და აგრეთვე $N$ და $M'$ წერტილებზე მოდებული $\vec{\mathbf{Q}}$ და $-\vec{\mathbf{P}}_1$ ერთმხრივ მოგეზული პარალელური ვექტორები. როგორც ადვილი მისახვედრია, მივიღებთ $MNM'N'$ პარალელოგრამის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილზე მოდებულ პირდაპირ თანაწინააღმდეგ $\vec{\mathrm{R}}$ და $-\vec{\mathrm{R}}$ ვექტორებს, რომელნიც ნულის ტოლფასია, და დაგვრჩება ზემოაღნიშნული 6 ვექტორის ნაცვლად $(\vec{\mathbf{P}}_1,\vec{\mathbf{Q}}_1)$ წყვილვექტორი, რომელიც ცხადია, $(\vec{\mathbf{P}},\vec{\mathbf{Q}})$ წყვილვექტორის მის პარალელურ სიბრტყეში გადატანით არის მიღებული. ამით დებულება დამტკიცებულია მთლიანად.

დამტკიცებული დებულებიდან გამომდინარეობს, რომ წყვილვექტორები მთლიანად დახასიათებულია მისი მომენტების საშუალებით. ამიტომ, წყვილვექტორის მოცემა ნიშნავს მისი მომენტის მოცემას და პირიქით.

ამავე დებულებიდან გამომდინარეობს აგრეთვე, რომ ელემენტარული მოქმედებების საშუალებით წყვილვექტორი ნებისმიერად შეიძლება მოვაბრუნოთ თავის სიბრტყეში, გადავიტანოთ მის პარალელურ სიბრტყეში, შევცვალოთ წყვილვექტორის შემადგენელი ვექტორების სიგრძე, თუ შესაბამისად შევცვლით მხარის სიგრძეს.

**დებულება 2.** სასრული რაოდენობა წყვილვექტორისაგან შემდგარი სისტემა ტოლფასია ერთი წყვილვექტორისა, რომლის მომენტი უდრის აღებული წყვილვეწტორების მომენტების ჯამს.

ჯერ განვიხილოთ ის შემთხვევა, როცა მოცემულია ორი $(\vec{\mathbf{P}}_1,\vec{\mathbf{Q}}_1)$ და $(\vec{\mathbf{P}}_2,\vec{\mathbf{Q}}_2)$ წყვილვექტორი, რომელთა სიბრტყეები არ არიან პარალელური. ამ სიბრტყეების გადაკვეთის წრფეზე ავიღოთ ნებისმიერი სიგრძის $MN$ მონაკვეთი და გარდავქმნათ წყვილვექტორები ისე, რომ მათი მხარი იყოს $MN$. გარდაქმნის შემდეგ მიღებული წყვილვექტორები იყოს $(\vec{\mathbf{P}}_1',\vec{\mathbf{Q}}_1')$ და $(\vec{\mathbf{P}}_2',\vec{\mathbf{Q}}_2')$. მივიღებთ $\vec{\mathbf{P}}_1', \vec{\mathbf{P}}_2', \vec{\mathbf{Q}}_1'$ და $\vec{\mathbf{Q}}_2'$ ვექტორებს, რომელთა შეკრებითაც მივიღებთ $(\vec{\mathbf{P}},\vec{\mathbf{Q}})$ წყვილვექტორს, რომელიც თავიდან მოცემული $(\vec{\mathbf{P}}_1,\vec{\mathbf{Q}}_1)$ და $(\vec{\mathbf{P}}_2,\vec{\mathbf{Q}}_2)$ წყვილვეწტორების სისტემის ტოლფასია.




ტოლფასობის გამო $(\vec{\mathbf{P}},\vec{\mathbf{Q}})$ წყვილვექტორის მომენტი მოცემული $(\vec{\mathbf{P}}_1,\vec{\mathbf{Q}}_1)$ და $(\vec{\mathbf{P}}_2,\vec{\mathbf{Q}}_2)$ წყვილვეწტორების მომენტების ჯამის ტოლია.

თუ წყვილვექტორთა სიბრტყეები პარალელურია, მაშინ ელემენტარული მოქმედებებით ერთ წყვილვექტორი შეიძლება ელემენტარული მოქმედებებით გადავიტანოთ მეორის სიბრტყეში, რის შემდეგაც ზემოთხსენებული წესით დებულება დამტკიცდება.

ანალოგიური დებულება დამტკიცდება ნებისმიერი რაოდენობის წყვილვექტორებისათვის.

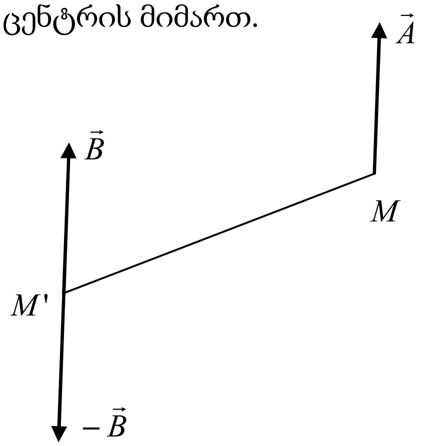
მოცემული წყვილვექტორების სისტემა $(\vec{\mathbf{P}}_1,\vec{\mathbf{Q}}_1)$, რომელთა მომენტებია $\vec{\mathbf{L}}_i$, ტოლფასია ერთი $(\vec{\mathbf{P}},\vec{\mathbf{Q}})$ წყილვექტორისა რომლის მომენტი $\vec{\mathbf{L}}$ გამოითვლება ფორმულით

$$\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{L}}_1 + \vec{\mathbf{L}}_2 + ... + \vec{\mathbf{L}}_n .$$

$(\vec{\mathbf{P}},\vec{\mathbf{Q}})$ წყვილვექტორს ეწოდება ტოლქმედი წყვილვექტორი, ხოლო $(\vec{\mathbf{P}}_i,\vec{\mathbf{Q}}_i)$ წყვილვექტორებს შესაკრები წყვილვექტორები.

## სრიალა ვექტორთა სისტემის დაყვანა ერთ ვექტორამდე და ერთ წყვილვექტორამდე

ვთქვათ, მოცემულია სრიალა $\vec{A}$ ვექტორი, რომელიც მოდებულია $M$ წერტილზე. განვიხილოთ სივრცის ნებისმიერ $M'$ წერტილი და მოვდოთ მასზე ორი პირდაპირ თანაწინააღმდეგი $\vec{B}$ და $-\vec{B}$ ვექტორი, სადაც $\vec{B}=\vec{A}$. ჩვენ მივიღეთ სამი $\vec{A}$, $\vec{B}$, $-\vec{B}$ ვექტორებისაგან შემდგარი სისტემა, რომელიც ტოლფასია $\vec{A}$ ვექტორის. მეორეს მხრივ, $(\vec{A},\ -\vec{B})$ წარმოადგენს წყვილვექტორს, რომლის მომენტიც ტოლია $\vec{A}$ ვექტორის მომენტისა $M'$ ცენტრის მიმართ.




ამრიგად, ჩვენ დავამტკიცეთ შემდეგი დებულება:

**დებულება:** მოცემული $\vec{A}$ ვექტორის მოდების $M$ წერტილი შეიძლება ნებისმიერ სხვა $M'$ წერტილში გადავიტანოთ, თუ სამაგიეროდ მას დავუმატებთ წყვილვექტორს, რომლის მომენტიც ტოლია მოცემული ვექტორის მომენტისა ახალი $M'$ წერტილის მიმართ.

ვთქვათ, გვაქვს სრიალა ვექტორთა სისტემა $\vec{A}_1,\vec{A}_2,...,\vec{A}_n$. ავიღოთ სივრცის ნებისმიერი $O$ წერტილი და აღვნიშნოთ $\vec{A}_i\ (i=1,...,n)$ ვექტორის მომენტი $O$ ცენტრის მიმართ $\vec{L}_i\ (i=1,...,n)$-ით. გადავიტანოთ ყოველი $\vec{A}_i\ (i=1,...,n)$ ვექტორი მოდების წერტილი $O$ ცენტრში ზემონაჩვენები წესით. მივიღებთ $O$ წერტილზე მოდებულ $\vec{B}_1,\vec{B}_2,...,\vec{B}_n$ ვექტორთა სისტემას და $(\vec{A}_1,-\vec{B}_1),(\vec{A}_2,-\vec{B}_2),...,(\vec{A}_n,-\vec{B}_n)$ წყვილვექტორთა სისტემას, სადაც $\vec{B}_i=\vec{A}_i\ (i=1,...,n)$, ამასთან $(\vec{A}_i,-\vec{B}_i)$ წყვილვექტორის მომენტი უნდარი $\vec{L}_i\ (i=1,...,n)$-ის. წინა პარაგრაფის მე-2 დებულების ძალით, წყვილვექტორთა

ხსენებული სისტემა ტოლფასია ერთი $(\vec{P},\vec{Q})$ წყვილვექტორის, რომლის მომენტია $L = L_1 + L_2 + ... + L_n$. შევკრიბოთ ახლა $O$ წერტილზე მოდებული $\vec{B}_i = \vec{A}_i \ (i = 1,...,n)$ ვექტორები; მივიღებთ $O$ წერტილზე მოდებულ ერთ $\vec{R}$ ვექტორს, რომელიც, ცხადია, სისტემის ნაკრებ ვექტორს წარმოადგენს.

ამრიგად, ჩვენ დავამტკიცეთ შემდეგი დებულება:

**დებულება:** სრიალა ვექტორთა ნებისმიერი სისტემა ტოლფასია სივრცის ნებისმიერ $O$ წერტილზე მოდებული ერთი $\vec{R}$ ვექტორისა, რომალიც სისტემის ნაკრები ვექტორის ტოლია და ერთი $(\vec{P},\vec{Q})$ წყვილვექტორისა, რომლის მომენტიც უდრის აღებული სისტემის ნაკრებ მომენტს $O$ ცენტრის მიმართ.

$O$ წერტილს ეწოდება სისტემის დაყვანის ცენტრი, ხოლო სისტემის ზემოაღნიშნულ გარდაქმნას - სისტემის დაყვანა მოცემულ $O$ ცენტრამდე. ამრიგად, ნებისმიერი სრიალა ვექტორთა სისტემა დაიყვანება მის ტოლფას სამ ვექტორამდე ($\vec{R}$ ვექტორამდე და $(\vec{P},\vec{Q})$ წყვილვექტორამდე). თუ ახლა $(\vec{P},\vec{Q})$ წყვილვექტორს ელემენტარული მოქმედებებით ისე გარდავქმნით, რომ მისი ერთ-ერთი ვექტორი დაყვანის $O$ ცენტრზე იყოს მოდებული და შევკრებთ ამ წერტილზე მოდებულ ვექტორებს, დავრწმუნდებით, რომ ნებისმიერი სრიალა ვექტორთა სისტემა საბოლოოდ მის ტოლფას 2 ვექტორამდე დაიყვანება.

**დებულება:** აუცილებელი და საკმარისი პირობა იმისა, რომ სრიალა ვექტორთა ორი სისტემა იყოს ტოლფასი, მდგომარეობს იმაში, რომ მათ ჰქონდეთ ერთნაირი ნაკრები ვექტორი და ერთნარი ნაკრები მომენტი რაიმე წერტილის მიმართ.

ვინაიდან ნაკრები ვექტორი და ნაკრები მომენტი ინვარიანტულია ელემენტარული გარდაქმნების მიმართ, ამიტომ პირობის აუცილებლობა ცხადია.

დავამტკიცოთ პირობის საკმარისობა, ე.ი. ვაჩვენოთ, რომ თუ სრიალა ვექტორთა ორ სისტემას აქვს ერთნაირი ნეკრები ვექტორი და ერთნაირი ნაკრები მომენტი რაიმე წერტილის მიმართ, მაშინ ისინი ტოლფასები იქნებიან.

განვიხილოთ სივრცის რაიმე $O$ წერილი და დავიყვანოთ ორივე სისტემა $O$ ცენტრამდე ზემონაჩვენები წესით. პირველი სისტემის დაყვანის შედეგად მივიღებთ $O$ ცენტრზე მოდებულ ერთ $\vec{R}'$ ვექტორს და $(\vec{P}',\vec{Q}')$ წყვილვექტორს. მეორე სისტემის დაყვანის შედეგად მიიღება იმავე $O$ ცენტრზე მოდებული $\vec{R}''$ ვექტორი და $(\vec{P}'',\vec{Q}'')$ წყვილვექტორი. პირობის ძალით $\vec{R}' = \vec{R}''$ და $(\vec{P}',\vec{Q}')$ და $(\vec{P}'',\vec{Q}'')$ წყვილვექტორებს აქვთ ერთნაირი მომენტები. წინა პარაგრაფის დებულება 1-ის ძალით ეს წყვილვექტორები ტოლფასია და ამით დებულება დამტკიცებულია.

შევნიშნოთ ის, რომ, თუ სრიალა ვექტორთა ორ სისტემას აქვს ერთნაირი ნაკრები ვექტორი და ერთნაირი ნაკრები მომენტი რაიმე წერტილის მიმართ, მაშინ მათ ექნებათ ერთნაირი ნაკრები ვექტორი და ერთნაირი ნაკრები მომენტი ნებისმიერი წერტილის მიმართაც.

გამოყენებული ლიტერატურა:


1. ნ. ვეკუა. თეორიული მექანიკა, თბილისის უნივერსიტეტის გამოცემა, 1991
2. ა. გორგიძე. თეორიული მექანიკის კურსი, წიგნი I, სტატიკა და კინემატიკა, გამომცემლობა "განათლება", თბილისი, 1990
3. ა. გორგიძე. თეორიული მექანიკის კურსი, წიგნი II, დინამიკა, გამომცემლობა "ტექნიკური უნივერსიტეტი", თბილისი, 1997