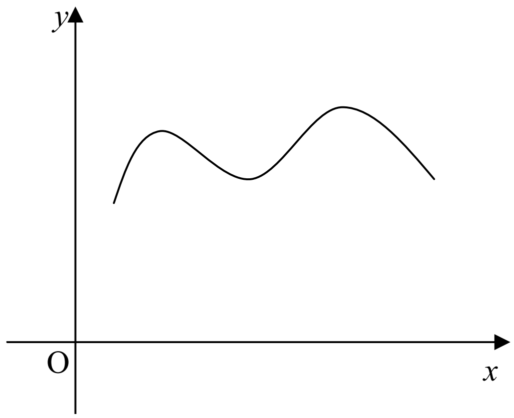
ლექცია 9

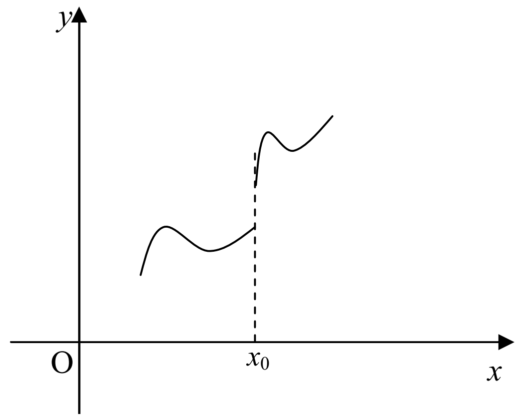
5.3. უწყვეტი ფუნქციები. ფუნქციის ზღვარი

თავდაპირველად შემოვიღოთ ცნება, რომელიც მათემატიკურად მკაცრი არ არის.

ფუნქცია უწყვეტია, თუ მისი გრაფიკი უწყვეტია. *გრაფიკი უწყვეტია*, თუ იგი იგება ხელის აუღებლად (იხ. ნახ. 5.3.1).



ნახ. 5.3.1



ნახ. 5.3.2

ცხადია, ნახ. 5.3.2-ზე მოცემული ფუნქცია წყვეტილია. მისი წყვეტის წერტილია x_0.

ფუნქციის განმარტებიდან გამომდინარე,

$$f(x, y) = 0$$

განტოლება იქნება რაიმე ფუნქციის ანალიზური წარმოდგენა მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა x-ის (არგუმენტის) ყოველ მნიშვნელობას y-ის ერთი მნიშვნელობა შეესაბამება.

ნახ. 5.3.3-ზე მოცემულია წრფე. წრფის

$$y = kx + b$$

განტოლება ფუნქციის ანალიზურ ჩაწერას წარმოადგენს, რადგან x-ის ყოველ მნიშვნელობას y-ის ერთი მნიშვნელობა შეესაბამება. ეს ფუნქცია უწყვეტია, რამდენადაც მისი აგება ხელის აუღებლად შეიძლება.

ნახ. 5.3.4-ზე მოცემული

$$y = x^2$$

პარაბოლაც უწყვეტი ფუნქციის მაგალითია.

წრეწირი (იხ. ნახ. 5.3.5) უწყვეტი წირია, მაგრამ მისი

$$y^2 + x^2 = R^2$$

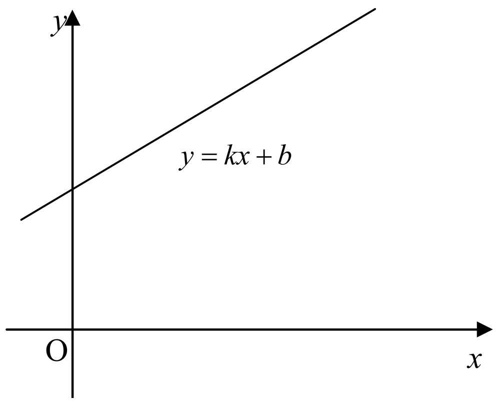
განტოლება არ არის ფუნქციის ანალიზური ჩაწერა, რადგან $x \in [-R, R]$-ის ყოველ მნიშვნელობას y-ის შემდეგი ორი

$$y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$$

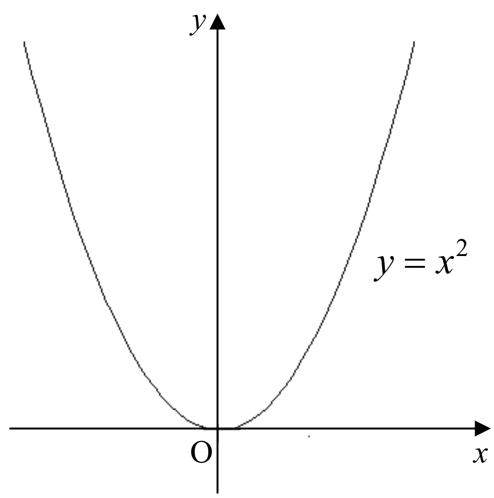
მნიშვნელობა შეესაბამება, მაგრამ

$$y=\sqrt{R^2-x^2} \quad \text{და} \quad y=-\sqrt{R^2-x^2}$$

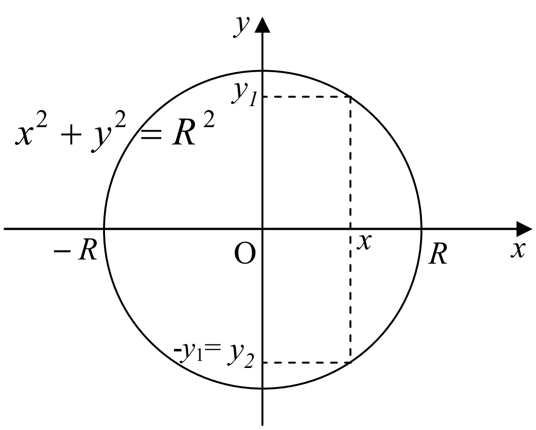
განტოლებები, რომლებიც ზედა და ქვედა ნახევარწრეწირებს შეესაბამება, ფუნქციების ანალიზური ჩაწერებია.



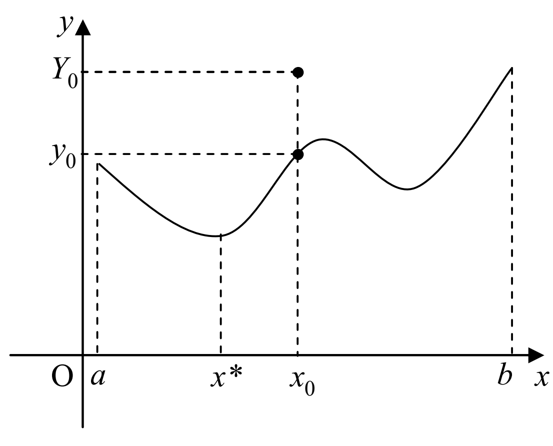
ნახ. 5.3.3



ნახ. 5.3.4



ნახ. 5.3.5



ნახ. 5.3.6

შემოვიღოთ ფუნქციის ზღვრის მათემატიკურად არამკაცრი განმარტება. $[a,b]$ სეგმენტზე ფუნქცია შემდეგნაირად განვმარტოთ:

როცა $x^*\in[a,x_0[\cup]x_0,b]$ (იხ. ნახ. 5.3.6), x^* წერტილიდან გავავლოთ y ღერძის პარალელური მონაკვეთი გრაფიკის გადაკვეთამდე. მისი სიგრძე მივიღოთ ფუნქციის მნიშვნელობად x^* წერტილში. x_0 წერტილში ფუნქცია განსაზღვრული არ გვაქვს. თუ ვიპოვით ისეთ y_0 რიცხვს, რომ მის x_0 წერტილში ფუნქციის მნიშვნელობად მიღების შემთხვევაში ფუნქცია უწყვეტად იქცევა, მაშინ y_0 რიცხვს ვუწოდებთ *ფუნქციის ზღვარს* x_0 წერტილში და ამ ფაქტს აღვნიშნავთ

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=y_0$$

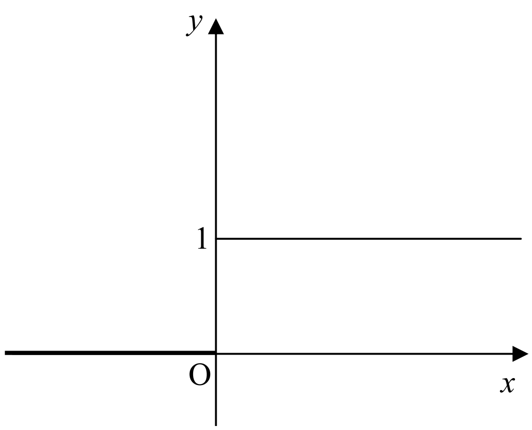
ჩანაწერით.

იმ შემთხვევაში, როცა ასეთი რიცხვი არ მოიძებნება, x_0 წერტილს *ფუნქციის წყვეტის წერტილი* ეწოდება და ვამბობთ, რომ ფუნქცია განიცდის წყვეტას x_0 წერტილში.

თუ ნახ. 5.3.6-ზე მოცემული ფუნქციის მნიშვნელობად x_0 წერტილში მივიღებთ $Y_0 \neq y_0$, მაშინ ფუნქციას x_0 წერტილში ექნება წყვეტა, მაგრამ x_0 წერტილში წყვეტა აცილებადია. *წყვეტის აცილებადი* წერტილი ეწოდება ფუნქციის წყვეტის ისეთ წერტილს, როცა ფუნქციას წყვეტის წერტილში შეიძლება ისეთი მნიშვნელობა მივანიჭოთ, რომელიც მას უწყვეტად აქცევს. ნახ. 5.3.6-ზე მოცემულ შემთხვევაში ასეთი მნიშვნელობაა y_0.

განვიხილოთ *ჰევისაიდის*[*)] *ფუნქცია* (იხ ნახ. 5.3.7):

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{როცა } x < 0 \\ 1, & \text{როცა } x \geq 0 \end{cases}$$



ნახ. 5.3.7

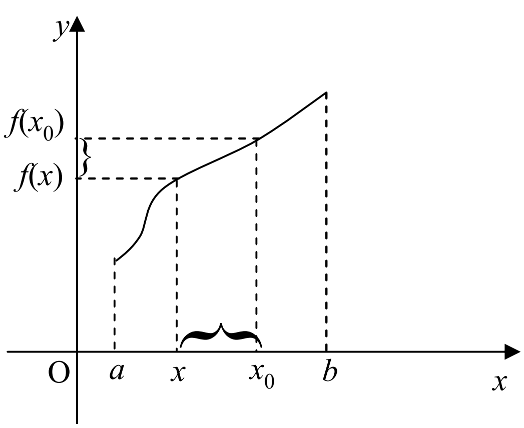
ამ შემთხვევაში ფუნქციის წყვეტის აცილებას ვერ მოვახერხებთ, რადგან არ არსებობს ისეთი მნიშვნელობა, რომლის $x = 0$ წერტილში ფუნქციის მნიშვნელობად მიღება ფუნქციას უწყვეტს გახდის. ჰევისაიდის $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია, როცა $x < 0$ ან $x > 0$, ე. ი. როცა $x \neq 0$. $x = 0$ წერტილში ის წყვეტას განიცდის.

ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია x_0 წერტილის რაიმე მიდამოში x_0 წერტილის ჩათვლით.

განსაზღვრა 5.3.1. $y = f(x)$ *ფუნქცია უწყვეტია მისი განსაზღვრის რაიმე* x_0 *წერტილში*, თუ ყოველი წინასწარ დასახელებული ε დადებითი რიცხვისთვის მოიძებნება ისეთი $\delta > 0$, რომ

$$\left|f(x) - f\left(x_0\right)\right| < \varepsilon, \text{ როცა } \left|x - x_0\right| < \delta. \quad (5.3.1)$$

ვთქვათ, ახლა $y = f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია x_0 წერტილის რაიმე მიდამოში, შესაძლებელია, x_0 წერტილის გარდა.



ნახ. 5.3.8

განსაზღვრა 5.3.2. $y = f(x)$ *ფუნქციას* x_0 *წერტილში აქვს* A *ზღვარი*, თუ ყოველი დადებითი ε რიცხვისთვის მოიძებნება ისეთი $\delta > 0$ რიცხვი, რომ

$$\left|f(x) - A\right| < \varepsilon, \text{ როცა } \quad 0 < \left|x - x_0\right| < \delta. \quad (5.3.2)$$

ამ ფაქტს შემდეგნაირად ჩავწერთ

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

ამ განსაზღვრებში არსებითია ის, რომ რაგინდ მცირე $\varepsilon > 0$ რიცხვისთვის მოიძებნება საკმარისად მცირე $\delta > 0$, რომელიც ε-ზეა დამოკიდებული.

განსაზღვრა 5.3.1 და განსაზღვრა 5.3.2 მათემატიკურად მკაცრი განსაზღვრებია.

[*)] ოლივერ ჰევისაიდი (1830 – 1925) – ინგლისელი ფიზიკოსი.

შედეგი 5.3.3. თუ

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0),$$

მაშინ ფუნქცია უწყვეტია x_0 წერტილში, ე. ი. თუ რაიმე x_0 წერტილში ფუნქციის ზღვარი x_0 წერტილში ფუნქციის მნიშვნელობის ტოლია, მაშინ ფუნქცია უწყვეტია x_0 წერტილში. x-ის მისწრაფება x_0-სკენ შეიძლება იყოს წყვეტილი ან უწყვეტი გზით.

შევნიშნოთ, რომ (5.3.1) ნიშნავს შემდეგს (იხ. ნახ. 5.3.8): თუ x საკმარისად ახლოა x_0-თან, მაშინ $f(x)$ რაგინდ ახლოა $f(x_0)$-თან.

განსაზღვრა 5.3.4. *ფუნქციას ეწოდება უწყვეტი* $]a,b[$ *ინტერვალზე*, თუ ის უწყვეტია $]a,b[$ ინტერვალის ნებისმიერ წერტილში.

ვთქვათ, $f(x)$ და $g(x)$ განსაზღვრულია x_0-ის მიდამოში და $\alpha = \text{const}$ (ე. ი. მუდმივია), მაშინ სამართლიანია ქვემოთ მოყვანილი 1)-3) თვისებები.

1) $\lim\limits_{x\to x_0}[\alpha f(x)] = \alpha \lim\limits_{x\to x_0}[f(x)] = \alpha A$, თუ არსებობს $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

დამტკიცება. ამისთვის (სიმბოლო $\forall$ ნიშნავს გამოთქმას „ნებისმიერი“, ხოლო სიმბოლო $\exists$ – „არსებობს“) უნდა ვაჩვენოთ, რომ

$$\forall \varepsilon_1 > 0 \quad \exists \delta > 0,$$

ისეთი, რომ

$$|\alpha f(x) - \alpha A| < \varepsilon_1, \text{ როცა } 0 < |x - x_0| < \delta.$$

მართლაც, თუ გავითვალისწინებთ (5.3.2)-ს,

$$|\alpha f(x) - \alpha A| = |\alpha| \cdot |f(x) - A| < |\alpha|\varepsilon =: \varepsilon_1, \text{ როცა } 0 < |x - x_0| < \delta.$$

2) ვთქვათ, არსებობს $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ და $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$, მაშინ

$$\lim_{x\to x_0}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x);$$

$$\lim_{x\to x_0}[f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x);$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}, \text{ თუ } g(x) \neq 0 \quad x_0\text{-ის რაიმე მიდამოში.}$$

3) თუ

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0,$$

$g(y)$ უწყვეტია y_0-ში და

$$g(y_0) = \alpha,$$

მაშინ

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = \alpha.$$ [*)]

მოვიყვანოთ ზღვრის გამოთვლის ორი მაგალითი:

1. $\lim\limits_{x\to 1} x^n = 1^n = 1 \quad \forall n \in R^1$;

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}(x+1) = 1+1 = 2$.

[*)] უწყვეტი ფუნქციების ჯამი, სხვაობა, ნამრავლი, განაყოფი (თუ გამყოფი ნულისაგან განსხვავებულია) უწყვეტია. ასევე უწყვეტია უწყვეტი ფუნქციის შებრუნებული ფუნქცია და უწყვეტი ფუნქციებისგან შედგენილი რთული ფუნქცია.

განსაზღვრა 5.3.5. A რიცხვს ეწოდება $f(x)$ *ფუნქციის ზღვარი*, როცა $x \to +\infty$, თუ ის განსაზღვრულია ნებისმიერი რაგინდ დიდი დადებითი x-სთვის და ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისთვის მოიძებნება ისეთი $c > 0$ რიცხვი, რომ, როცა $x > c$, სრულდება

$$\left| f(x) - A \right| < \varepsilon$$

უტოლობა და ვწერთ, რომ

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A.$$

განსაზღვრა 5.3.6. ვიტყვით, რომ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = A$, თუ ის განსაზღვრულია ნებისმიერი რაგინდ მცირე უარყოფითი x-სთვის და ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისთვის მოიძებნება ისეთი $c < 0$ რიცხვი, რომ, როცა $x < c$, სრულდება

$$\left| f(x) - A \right| < \varepsilon$$

უტოლობა.

თუ ფუნქცია განსაზღვრულია რაიმე შუალედში, მაშინ შეიძლება ლაპარაკი ფუნქციის ზღვარზე შუალედის ყველა წერტილში, გარდა შუალედის ბოლო წერტილებისა, რადგან შუალედის ბოლო წერტილებისთვის არ არსებობს ორმხრივი მიდამო, სადაც ფუნქცია განსაზღვრული იქნება. ასეთ შემთხვევაში განიხილავენ ე. წ. ცალმხრივ ზღვრებს.

განსაზღვრა 5.3.7. A რიცხვს ეწოდება $f(x)$ *ფუნქციის მარცხენა ზღვარი* a წერტილში, თუ ის განსაზღვრულია a წერტილის რაიმე მარცხენა მიდამოში, გარდა, შესაძლებელია, თვით ამ წერტილისა, და ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისთვის მოიძებნება ისეთი $\delta > 0$ რიცხვი, რომ, როცა

$$0 < a - x < \delta,$$

სრულდება

$$\left| f(x) - A \right| < \varepsilon$$

უტოლობა. ამ შემთხვევაში ვწერთ, რომ

$$\lim_{x \to a-} f(x) = A.$$

განსაზღვრა 5.3.8. A რიცხვს ეწოდება $f(x)$ *ფუნქციის მარჯვენა ზღვარი* a წერტილში, თუ ის განსაზღვრულია a წერტილის რაიმე მარჯვენა მიდამოში, გარდა, შესაძლებელია, თვით ამ წერტილისა, და ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისთვის მოიძებნება ისეთი $\delta > 0$ რიცხვი, რომ, როცა

$$0 < x - a < \delta,$$

სრულდება

$$\left| f(x) - A \right| < \varepsilon$$

უტოლობა. ამ შემთხვევაში ვწერთ, რომ

$$\lim_{x \to a+} f(x) = A.$$

თუ $f(x)$ *ფუნქცია განსაზღვრულია* a წერტილის რაიმე მიდამოში, გარდა შესაძლებელია, თვით ამ წერტილისა, და a წერტილში აქვს ტოლი მარცხენა და მარჯვენა ზღვარი, მაშინ, ცხადია, $f(x)$ *ფუნქციას* a წერტილში აქვს ზღვარი.

განსაზღვრა 5.3.9. ვიტყვით, რომ

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \quad \left(\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \right),$$

თუ $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია a წერტილის რაიმე მიდამოში, გარდა, შესაძლებელია, a წერტილისა, და ყოველი დადებითი B-სთვის მოიძებნება ისეთი $\delta > 0$, რომ

$$f(x) > B \quad \left(f(x) < -B \right),$$

როცა

$$0 < |x-a| < \delta.$$

განსაზღვრა 5.3.10. ვიტყვით, რომ

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad \left(\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty\right),$$

თუ $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია ნებისმიერი რაგინდ დიდი დადებითი x-ისთვის და ყოველი დადებითი B-სთვის მოიძებნება ისეთი დადებითი A, რომ

$$f(x) > B \quad \left(f(x) < -B\right),$$

როცა

$$x > A.$$

განსაზღვრა 5.3.11. ვიტყვით, რომ

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \quad \left(\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty\right),$$

თუ $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია ნებისმიერი რაგინდ მცირე უარყოფითი x-ისთვის და ყოველი დადებითი B-სთვის მოიძებნება ისეთი დადებითი A, რომ

$$f(x) > B \quad \left(f(x) < -B\right),$$

როცა

$$x < -A.$$

გამოყენების თვალსაზრისით მნიშვნელოვანია შემდეგი ზღვრები:

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$;

$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$;

$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^k}{a^x} = 0$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^k} = +\infty \quad (a > 1, \quad k > 0)$;

$\lim_{x\to 0+} x^{\alpha}\ln x = 0$, სადაც მუდმივი $\alpha > 0$.

$\lim_{x\to 0+} x^k \log_a x = 0 \quad (a > 1, \quad k > 0)$;

$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^k}{\log_a x} = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x^k} = 0 \quad (a > 1, \quad k > 0)$;

$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$.