ლექცია 6

4.2. წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემები

n უცნობიან n წრფივ *ალგებრულ განტოლებათა სისტემას* აქვს შემდეგი სახე:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \; i = 1,2,\dots,n,$$

ან გაშლილად

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{4.2.1}$$

x_1, x_2, …, x_n უცნობებია, a_{ik} რიცხვები – (4.2.1) სისტემის კოეფიციენტები, ხოლო b_1, b_2, …, b_n რიცხვები – თავისუფალი წევრები. (4.2.1) სისტემას *ერთგვაროვანი* ეწოდება, თუ $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 0$.

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{4.2.2}$$

მატრიცს ეწოდება (4.2.1) *სისტემის მატრიცი*, ხოლო მის $|A|$ დეტერმინანტს – სისტემის (*მთავარი*) *დეტერმინანტი.*

(4.2.1) *სისტემის ამონახსნი* ეწოდება x_1, x_2, …, x_n ცვლადთა იმ მნიშვნელობებს, რომლებიც სისტემის განტოლებებს იგივეობებად აქცევენ.

სისტემას, რომელსაც ერთი მაინც ამონახსნი აქვს, *თავსებადი* ეწოდება. სისტემას, რომელსაც ამონახსნი არ აქვს, *არათავსებადი* ეწოდება.

ვთქვათ, $|A| \neq 0$.

უცნობებით შედგენილი მატრიცი-სვეტი აღვნიშნოთ X-ით, ხოლო თავისუფალი წევრების მატრიცი-სვეტი – B-თი.

$$X := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

მატრიცთა გამრავლების წესის თანახმად AX წარმოადგენს (4.2.1) სისტემის მარცხენა ნაწილს. მაშასადამე, (4.2.1) სისტემა შეიძლება ჩაიწეროს (ვექტორული) სახით შემდეგნაირად:

$$AX = B. \tag{4.2.3}$$

$(4.2.3)$-ს *მატრიცული განტოლება* ეწოდება. რადგან $|A| \neq 0$, ამიტომ A მატრიცის შებრუნებული A^{-1} მატრიცი არსებობს. $(4.2.3)$ ტოლობის ორივე მხარე მარცხნიდან გადავამრავლოთ A^{-1}-ზე:

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B\,,$$
$$\left(A^{-1}A\right)X = A^{-1}B\,,$$

რადგანაც $A^{-1}A = I$ და $IX = X$, ამიტომ

$$X = A^{-1}B\,. \qquad (4.2.4)$$

ამდენად, $(4.2.4)$ არის $(4.2.3)$-ის ამონახსნი.

n-უცნობიან n წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნა, *მატრიცული მეთოდის* გარდა, შესაძლებელია დეტერმინანტების გამოყენებით. ამ მეთოდს *კრამერის**) *მეთოდი* ეწოდება.

ცხადია,

$$A^{-1}B = \frac{1}{|A|}\begin{Vmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{j1} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{j2} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ A_{1i} & A_{2i} & \cdots & A_{ji} & \cdots & A_{ni} \\ \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{jn} & \cdots & A_{nn} \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{Vmatrix} = |A|^{-1}\begin{Vmatrix} A_{k1}b_k \\ A_{k2}b_k \\ \vdots \\ A_{ki}b_k \\ \vdots \\ A_{kn}b_k \end{Vmatrix}.$$

ამიტომ $(4.2.4)$-ის სკალარული სახე იქნება

$$x_i = |A|^{-1}\sum_{k=1}^{n} A_{ki}b_k\,,$$

ან რაც იგივეა

$$x_i = \frac{\Delta_{x_i}}{\Delta}\,,\ \ i = 1,2,\ldots,n\,,$$

სადაც $\Delta := |A|$ $(4.2.1)$ სისტემის *მთავარი დეტერმინანტია*, Δ_{x_i}, $i = 1,2,\ldots,n$, – *დამხმარე დეტერმინანტები*, რომლებიც მთავარ დეტერმინანტში x_i, $i = 1,2,\ldots,n$, უცნობების კოეფიციენტების შესაბამისი თავისუფალი წევრებით შეცვლით მიიღებიან. ამ უკანასკნელ ფორმულებს *კრამერის ფორმულები* ეწოდება.

განიხილება შემდეგი შემთხვევები:

1) თუ $\Delta \neq 0$, მაშინ $(4.2.1)$ სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი;

2) თუ $\Delta = 0$ და Δ_{x_i}-დან, $i = 1,2,\ldots,n$, ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისგან, მაშინ $(4.2.1)$ სისტემა არ არის თავსებადი (ამონახსნი არ აქვს);

3) თუ $\Delta = 0$ და $\Delta_{x_i} = 0$, $i = 1,2,\ldots,n$, მაშინ $(4.2.1)$ სისტემას ან აქვს უსასრულოდ ბევრი ამონახსნი ან არ არის თავსებადი**) (იხ. ქვემოთ კრონეკერ-კაპელის თეორემა და ტექსტი მის შემდეგ).

---

*) გ. კრამერი (1704 – 1752) – შვეიცარიელი მათემატიკოსი.

**) მაგალითად,

n-უცნობიან n წრფივ ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემას აქვს შემდეგი სახე:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0, \quad i = 1,2,\ldots,n,$$

ან გაშლილად

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0. \end{cases} \tag{4.2.5}$$

ეს სისტემა თავსებადია, რადგან მას ყოველთვის გააჩნია *ტრივიალური*, ანუ *ნულოვანი* $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ ამონახსნი. ამასთან, თუ $\Delta \neq 0$, ზემოთქმულიდან გამომდინარე, ტრივიალური ამონახსნი ერთადერთი ამონახსნია, ვინაიდან დეტერმინანტის მე-5 თვისების თანახმად ყველა $\Delta_{x_i} = 0$, $i = 1,2,\ldots,n$ [დეტერმინანტი ნულის ტოლია, თუ მისი რომელიმე სვეტის ყველა ელემენტი ნულის ტოლია], ხოლო თუ $\Delta = 0$, მას უსასრულოდ ბევრი ამონახსნი აქვს.

განვიხილოთ n-უცნობიან m წრფივ განტოლებათა შემდეგი სისტემა:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1,2,\ldots,m,$$

ან გაშლილად

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{4.2.6}$$

განსაზღვრა 4.2.1. $u_1, u_2, \ldots, u_s$ ვექტორთა სისტემას ეწოდება *წრფივად დამოუკიდებელი*, თუ

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_s u_s = 0$$

ტოლობა სრულდება მხოლოდ მაშინ, როცა $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_s = 0$. თუ ვექტორთა სისტემა არ არის წრფივად დამოუკიდებელი, მაშინ მას *წრფივად დამოკიდებული* სისტემა ეწოდება. ამ შემთხვევაში ერთი მაინც ვექტორი წარმოიდგინება დანარჩენების წრფივი კომბინაციის სახით.

განსაზღვრა 4.2.2. ვიტყვით, რომ *ვექტორთა სისტემის რანგი* არის $r \geq 1$ [და ჩავწერთ $rank(u_1, u_2, \ldots u_s) = r$], თუ ეს სისტემა შეიცავს r წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორისაგან

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 0,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

არათავსებადი სისტემის მთავარი და დამხმარე, დეტერმინანტები ნულის ტოლია.

შედგენილ ერთ ქვესისტემას მაინც, მაგრამ სისტემის ყოველი $r+1$ ვექტორი წრფივად დამოკიდებულია. ვიტყვით, რომ რანგი არის 0, თუ სისტემის ყველა ვექტორი ნულოვანია.

განსაზღვრა 4.2.3. *მატრიცზე ელემენტარული ოპერაციები (გარდაქმნები)* ეწოდება შემდეგ გარდაქმნებს:

1) მატრიცის სტრიქონების (სვეტების) ადგილის შეცვლა;

2) რომელიმე სტრიქონის (სვეტის) ელემენტების გამრავლება ნულისგან განსხვავებულ რაიმე რიცხვზე;

3) ერთი სტრიქონის (სვეტის) ელემენტებისთვის სხვა სტრიქონის (სვეტის) შესაბამისი ელემენტების, გამრავლებულის ნულისაგან განსხვავებულ რაიმე რიცხვზე, მიმატება.

განსაზღვრა 4.2.4. *მატრიცის რანგი* ეწოდება მატრიცის შესაბამის დეტერმინანტის ნულისგან განსხვავებული მინორების რიგებს შორის უდიდესს.

ლემა 4.2.5. თუ მატრიცი შეიცავს r რიგის Δ დეტერმინანტს, რომელიც ნულისგან განსხვავდება, ხოლო ყველა $r+1$ რიგის დეტერმინანტი, რომელიც Δ-ს შეიცავს მინორად ნულის ტოლია, მაშინ მატრიცის ჰორიზონტალურ ვექტორთა სისტემის რანგი იქნება $r \geq 1$.

თეორემა 4.2.6 (მატრიცის რანგის შესახებ). მატრიცის რანგი ტოლია მატრიცის ჰორიზონტალურ (ვერტიკალურ) ვექტორთა სისტემის რანგის.

შედეგი 4.2.7. იმისთვის, რომ n–ური რიგის დეტერმინანტი ნულის ტოლი იყოს აუცილებელი და საკმარისია, რომ მისი ჰორიზონტალური (ვერტიკალური) ვექტორები იყოს წრფივად დამოკიდებული.

ელემენტარული მოქმედებების შედეგად მატრიცის რანგი არ იცვლება.

განსაზღვრა 4.2.8. A და B მატრიცებს ეწოდება *ეკვივალენტური* $(A \sim B)$, თუ ერთი მათგანი მეორისგან ელემენტარული მოქმედებებით მიიღება.

(4.2.6) სისტემის *მატრიცი* ეწოდება

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{4.2.7}$$

მატრიცს, ხოლო *გაფართოებული მატრიცი* –

$$\widetilde{A} := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{21} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \tag{4.2.8}$$

მატრიცს.

კრონეკერ*)-კაპელის) თეორემა**. იმისთვის, რომ (4.2.6) სისტემა თავსებადი იყოს, აუცილებელი და საკმარისია, სისტემის (4.2.7) მატრიცის რანგი გაფართოებული (4.2.8) მატრიცის რანგის ტოლი იყოს.

თუ $m = n$, სისტემა თავსებადია და $r = n$, მაშინ სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი, ხოლო როცა $r < n$ მას აქვს უსასრულოდ ბევრი ამონახსნი.

---

*) ლ. კრონეკერი (1823 – 1891) – გერმანელი მათემატიკოსი.

**) ა. კაპელი (1855 – 1910) – იტალიელი მათემატიკოსი.

კრონეკერ-კაპელის თეორემის ძალით, (4.2.5) სისტემა ყოველთვის თავსებადია, რადგან

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ და } \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 \end{pmatrix}$$

მატრიცების რანგები ტოლია.

როცა (4.2.1) და (4.2.6) სისტემები თავსებადია (იხ. კრონეკერ-კაპელის თეორემა) მათი და და (4.2.5) სისტემის, რომელიც ყოველთვის თავსებადია, ამონახსნების საპოვნელად მთავარი დეტერმინანტიდან უნდა განვსაზღვროთ მაქსიმალური r რიგის, ნულის არატოლი მინორი. მაშინ მატრიცის რანგის შესახებ თეორემის (თეორემა 4.2.6.) თანახმად, A და $\widetilde{A}$ მატრიცების ერთიდაიგივე r ჰორიზონტალური ვექტორი, რომლებიც შეიცავენ აღნიშნული მინორის სტრიქონებს, იქნება წრფივად დამოუკიდებელი, ხოლო ამ მატრიცების ნებისმიერი სხვა ჰორიზონტალური ვექტორი კი იქნება ამ r წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორის წრფივი კომბინაცია. ამიტომ მოცემული სისტემიდან დავტოვოთ ის განტოლებები, რომელთა კოეფიციენტები მინორში მონაწილეობენ. ახლად მიღებული სისტემა ისე გადავწეროთ, რომ მინორში მონაწილე კოეფიციენტების შესაბამისი უცნობები ტოლობის მარცხენა მხარეს დავტოვოთ, დანარჩენები კი ტოლობის მარჯვენა მხარეს გადავიტანოთ ნიშნის შეცვლით. ტოლობის მარჯვენა მხარეს მიღებული გამოსახულებები თავისუფალ წევრებად ჩავთვალოთ და სისტემა ჩვეულებრივად კრამერის ფორმულებით ან მატრიცულად ამოვხსნათ. რამდენადაც მარჯვენა მხარეები იქნება უცნობების შემცველი, მათთვის ნებისმიერი მნიშვნელობების მინიჭებით მივიღებთ ამონახსნების უსასრულოდ ბევრ რაოდენობას.

სისტემის ამოხსნის მეთოდს, რომელიც უცნობთა გამორიცხვას ემყარება, *გაუსის*[***)] *მეთოდი* ეწოდება. ეს მეთოდი განვიხილოთ მაგალითებზე.

მაგალითი 4.2.9. ამოვხსნათ შემდეგი სისტემა:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 = 3. \end{cases}$$

ამოხსნა: შევადგინოთ გაფართოებული მატრიცი:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

მეორე სტრიქონს გამოვაკლოთ 2-ზე გამრავლებული პირველი სტრიქონი (x_1-ის კოეფიციენტს გაუსის მეთოდის პირველი ბიჯის *წამყვანი ელემენტი* ეწოდება) და მესამეს გამოვაკლოთ პირველი (სიდიდე, რაზეც პირველი სტრიქონი უნდა გავამრავლოთ, მიიღება შესაბამისად მეორე და მესამე განტოლების x_1-ის კოეფიციენტის პირველი განტოლების x_1-ის კოეფიციენტზე ე.ი. პირველი ბიჯის წამყვან ელემენტზე გაყოფით. ამ მოქმედებების შემდეგ მეორე და მესამე განტოლებებში გამოირიცხა x_1, ამასთან ამ კონკრეტულ შემთხვევაში არ დაგვჭირდა დამატებითი მოქმედება მესამე განტოლებიდან x_2-ის გამოსარიცხად):

[***)] კ. ფ. გაუსი (1777 – 1855) – გერმანელი მათემატიკოსი.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vline & 6 \\ 0 & 1 & -3 & \vline & -7 \\ 0 & 0 & -1 & \vline & -3 \end{pmatrix}.$$

რამდენადაც ელემენტარული მოქმედებების შედეგად მატრიცის რანგი არ იცვლება, ცხადია, $r(A)=r\left(\widetilde{A}\right)=3$, $n=3$, ე. ი. $r=n$, ამდენად, სისტემას ერთადერთი ამონახსნი აქვს. სისტემა ჩავწეროთ შემდეგი ეკვივალენტური სახით:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=6, \\ \quad x_2-3x_3=-7, \\ \qquad\quad x_3=3. \end{cases}$$

ამით დასრულდა გაუსის მეთოდის ერთი ნაწილი – ე. წ. „*პირდაპირი სვლა*“. აქედან ნათელია, რომ

$$x_3=3,$$
$$x_2=-7+3\cdot 3=2,$$
$$x_1=6-2-3=1.$$

ამ პროცესს გაუსის მეთოდის „*უკუსვლა*“ ეწოდება.

მაგალითი 4.2.10. ამოვხსნათ შემდეგი სისტემა:

$$\begin{cases} x+2y+3z=4, \\ 2x+y-z=3, \\ 3x+3y+2z=10. \end{cases}$$

ამოხსნა: შევადგინოთ გაფართოებული მატრიცი:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \vline & 4 \\ 2 & 1 & -1 & \vline & 3 \\ 3 & 3 & 2 & \vline & 10 \end{pmatrix}.$$

მეორე სტრიქონს გამოვაკლოთ 2-ზე გამრავლებული პირველი სტრიქონი და მესამე სტრიქონს გამოვაკლოთ 3-ზე გამრავლებული პირველი სტრიქონი:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \vline & 4 \\ 0 & -3 & -7 & \vline & -5 \\ 0 & -3 & -7 & \vline & -2 \end{pmatrix}.$$

ახლა, თუ მესამე სტრიქონს გამოვაკლებთ მეორეს (ამით x_2-ს გამოვრიცხავთ მესამე განტოლებიდან), მივიღებთ

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \vline & 4 \\ 0 & -3 & -7 & \vline & -5 \\ 0 & 0 & 0 & \vline & 3 \end{pmatrix}.$$

რამდენადაც ელემენტარული მოქმედებების შედეგად მატრიცის რანგი არ იცვლება, ცხადია, $r(A)=2$, $r\left(\widetilde{A}\right)=3$, ე. ი. $r(A)\neq r\left(\widetilde{A}\right)$ და, კრონეკერ-კაპელის თეორემის თანახმად, სისტემა არათავსებადია.

სამუცნობიან განტოლებათა სისტემისთვის ზოგად შემთხვევაში გაუსის მეთოდი ამგვარია. განვიხილოთ შემდეგი სისტემა

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3. \end{aligned} \qquad (4.2.9)$$

დავიწყოთ პირდაპირი სვლა. a_{11} პირველი ბიჯის წამყვანი ელემენტია. სისტემის პირველი განტოლება გავამრავლოთ $\frac{a_{21}}{a_{11}}$-ზე (ვგულისხმობთ, რომ $a_{11} \neq 0$), მიღებული გამოვაკლოთ მეორე განტოლებას, მაშინ

$$\left(a_{22} - a_{12}\frac{a_{21}}{a_{11}}\right)x_2 + \left(a_{23} - a_{13}\frac{a_{21}}{a_{11}}\right)x_3 = b_2 - b_1\frac{a_{21}}{a_{11}}. \qquad (4.2.10)$$

შემდეგ პირველი განტოლება გავამრავლოთ $\frac{a_{31}}{a_{11}}$-ზე და მიღებული გამოვაკლოთ მესამეს, გვექნება

$$\left(a_{32} - a_{12}\frac{a_{31}}{a_{11}}\right)x_2 + \left(a_{33} - a_{13}\frac{a_{31}}{a_{11}}\right)x_3 = b_3 - b_1\frac{a_{31}}{a_{11}}. \qquad (4.2.11)$$

სიმოკლისთვის $(4.2.10)$-ის კოეფიციენტები აღვნიშნოთ α_{22}-ით და α_{23}-ით, ხოლო მარჯვენა მხარე — β_2-ით; ანალოგიურად, $(4.2.11)$-ის კოეფიციენტები აღვნიშნოთ α_{32}-ით და α_{33}-ით, ხოლო მარჯვენა მხარე — β_3-ით. მაშინ $(4.2.9)$ სისტემა შეიძლება გადმოვწეროთ:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1, \\ \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3 &= \beta_2, \\ \alpha_{32}x_2 + \alpha_{33}x_3 &= \beta_3 \end{aligned} \qquad (4.2.12)$$

სახით. როგორც ვხედავთ, მეორე და მესამე განტოლებებიდან გამოვრიცხეთ x_1. ახლა, თუ $\alpha_{32} \neq 0$, პირველი განტოლება უცვლელად დავტოვოთ და მსგავსი მოქმედებები ჩავატაროთ მეორე და მესამე განტოლებებისგან შემდგარი სისტემისთვის $(4.2.12)$-ში. სახელდობრ, მეორე განტოლება გავამრავლოთ $\frac{\alpha_{32}}{\alpha_{22}}$-ზე (ვგულისხმობთ, რომ $\alpha_{22} \neq 0$) და გამოვაკლოთ მესამეს. ამით მესამე განტოლებაში გამოირიცხება x_2 და საბოლოოდ მივიღებთ $(4.2.9)$ სისტემის ეკვივა-ლენტურ შემდეგ სისტემას:

$$\begin{aligned} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ & \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3 = \beta_2, \\ & \left(\alpha_{33} - \alpha_{23}\frac{\alpha_{32}}{\alpha_{22}}\right)x_3 = \beta_3 - \beta_2\frac{\alpha_{32}}{\alpha_{22}}. \end{aligned} \qquad (4.2.13)$$

ახლა კი უკუსვლის პროცესს შევუდგეთ. თუ x_3-ის კოეფიციენტი ნულისაგან განსხვავებულია*), $(4.2.13)$-ის მესამე განტოლებიდან ვპოულობთ x_3-ს. მის მნიშვნელობას ჩავსვამთ მეორე

---

*) თუ x_3-ის კოეფიციენტი ნულის ტოლია, ხოლო მარჯვენა მხარე ნულისგან განსხვავებულია, მაშინ ასეთი x_3 არ არსებობს და სისტემა არათავსებადია. თუ მარჯვენა მხარე ნულის ტოლია, მესამე

განტოლებაში და გამოვთვლით x_2-ს. შემდეგ x_2-ის და x_3-ის ნაპოვნ მნიშვნელობებს (4.2.13)-ის პირველში ჩავსვამთ და x_1-საც ვიპოვით.

თუ $\alpha_{22}=0$, მაშინ (4.2.12)-ის მეორე განტოლებიდან ვპოულობთ x_3-ს, თუ $\alpha_{23}\neq 0$ (წინააღმდეგ შემთხვევაში (4.2.12) სისტემის დეტერმინანტი ნულის ტოლია და სისტემა არათავსებადია, თუ გაფართოებული მატრიცის რანგი სისტემის მატრიცის რანგის ტოლი არაა. თუ მათი რანგები ტოლია, მაშინ სისტემას უსასრულოდ ბევრი ამონახსნი ექნება.). მის მნიშვნელობას ჩავსვამთ (4.2.12)-ის მესამე განტოლებაში და გამოვთვლით x_2-ს, თუ $\alpha_{32}\neq 0$. შემდეგ x_2-ის და x_3-ის მნიშვნელობებს პირველში ჩავსვამთ და x_1-საც ვიპოვით.

თუ $\alpha_{32}=0,\ \alpha_{22}\neq 0,\ \alpha_{33}\neq 0$, მაშინ (4.2.12)-ის მესამედან ვპოულობთ x_3-ს. მის მნიშვნელობას ჩავსვამთ მეორე განტოლებაში და გამოვთვლით x_2-ს. შემდეგ x_2-ის და x_3-ის ნაპოვნ მნიშვნელობებს პირველში ჩავსვამთ და x_1-საც გამოვთვლით.

თუ $\alpha_{32}=0,\ \alpha_{22}=0$, მაშინ სისტემის დეტერმინანტი ნულის ტოლია (რადგან ის ამ შემთხვევაში დიაგონალური ელემენტების ნამრავლის ტოლია α_{22} კი ნულის ტოლია) და სისტემა არათავსებადია, თუ გაფართოებული მატრიცის რანგი სისტემის მატრიცის რანგის ტოლი არაა. თუ მათი რანგები ტოლია, მაშინ სისტემას უსასრულოდ ბევრი ამონახსნი ექნება.

თუ $a_{11}=0$, მაშინ პირველი ბიჯის წამყვან ელემენტად უნდა ავიღოთ a_{21} და a_{31}-დან ნულისგან განსხვავებული. თუ სისტემა თავსებადია, მას ამოვხსნით გაუსის მეთოდით, ამასთან პირველი ბიჯის წამყვან ელემენტად უნდა ავიღოთ x_2−ის ან x_3−ის არანულოვანი კოეფიციენტი.

იმ შემთხვევაში, როცა $a_{i1}=0,\ i=1,2,3,$ და $b_1\neq 0$ განტოლებათა სისტემა თავსებადი არაა, რადგან ნებისმიერი x_i-ებისთვის, $i=1,2,3,$ პირველი განტოლების მარცხენა მხარე ყოველთვის ნულია, ხოლო მარჯვენა მხარე ნული არ არის, ე.ი. პირველი განტოლება არ დაკმაყოფილდება. თუ $b_1=0$, მაშინ განტოლებათა სისტემა იქნება ორი განტოლებისგან შემდგარი სამუცნობიანი სისტემა. ამ უკანასკნელ შემთხვევაში გამოვიყენებთ კრონეკერ-კაპელის თეორემას.

განტოლებას ნებისმიერი x_3 დააკმაყოფილებს და უკუსვლით, ძირითად ტექსტში მითითებულის მსგავსად, მივიღებთ ამონახსნთა უსასრულო რაოდენობას ან სისტემის არათავსებადობას.