ლექცია 4

3. კომპლექსური რიცხვები

3.1. კომპლექსური რიცხვის ცნება

მათემატიკის განვითარებამ და მისმა პრაქტიკულმა გამოყენებამ აუცილებელი გახადა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის გაფართოება. მაგალითად,

$$x^2+1=0 \tag{3.1.1}$$

განტოლებას ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეზე ამონახსნი არ აქვს. მართლაც, თუ $x\neq 0$, მაშინ, დალაგების აქსიომებიდან გამომდინარე, მე-4 მტკიცების თანახმად, $x^2>0$ და ამდენად, $x^2+1>0$, ხოლო $x=0$-ს, ცხადია, ამონახსნი არ არის. შევეცადოთ, გავაფართოოთ რიცხვის ცნება ისე, რომ (3.1.1) განტოლებას ჰქონდეს ამონახსნი. ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის ასეთ გაფართოებას ვუწოდოთ კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლე.

განსაზღვრა 3.1.1. *კომპლექსური რიცხვები* შეიძლება განვსაზღვროთ, როგორც დალაგებულ რიცხვთა (a,b) წყვილები, რომლებიც აღინიშნება z სიმბოლოთი, ე. ი.

$$z:=(a,b), \tag{3.1.2}$$

რომელთათვისაც განმარტებულია ტოლობა და ძირითადი არითმეტიკული მოქმედებები: შეკრება, გამოკლება, გამრავლება და გაყოფა.

განსაზღვრა 3.1.2. (3.1.2)-ში a-ს ეწოდება z *კომპლექსური რიცხვის ნამდვილი ნაწილი*, ხოლო b-ს *წარმოსახვითი ნაწილი* და აღინიშნება შემდეგნაირად: $a=\operatorname{Re} z$, $b=\operatorname{Im} z$.

განსაზღვრა 3.1.3. ვიტყვით, რომ $z=(a,b)$ კომპლექსური რიცხვი ნულის ტოლია, ე. ი. $z=0$, თუ $a=0$ და $b=0$.

როცა $b=0$, მაშინ

$$(a,0)=:a\,, \tag{3.1.3}$$

ე. ი. ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლე შეიძლება განვიხილოთ, როგორც კომპლექსურ რიცხვთა C სიმრავლის ქვესიმრავლე.

განსაზღვრა 3.1.4. *ორ კომპლექსურ* $z_1:=(a_1,b_1)$ *და* $z_2:=(a_2,b_2)$ *რიცხვს ეწოდება ტოლი* მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $a_1=a_2$ და $b_1=b_2$.

კომპლექსურ რიცხვებზე განვმარტოთ არითმეტიკული მოქმედებები.

განსაზღვრა 3.1.5. *ორი კომპლექსური* $z_1:=(a_1,b_1)$ *და* $z_2:=(a_2,b_2)$ *რიცხვის ჯამი* ეწოდება შემდეგი სახის კომპლექსურ რიცხვს

$$z=z_1+z_2:=(a_1+a_2,b_1+b_2)\,, \tag{3.1.4}$$

ხოლო *ნამრავლი* ეწოდება z კომპლექსურ რიცხვს, რომელსაც აქვს

$$z=z_1\cdot z_2:=(a_1a_2-b_1b_2,a_2b_1+a_1b_2) \tag{3.1.5}$$

სახე.

ადვილი შესამოწმებელია, რომ კომპლექსური რიცხვების ჯამს და ნამრავლს აქვს ნამდვილი რიცხვების ჯამისა და ნამრავლის ანალოგიური თვისებები. ასე რომ, კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლე წარმოადგენს ველს, მაგრამ არადალაგებულს.

განსაზღვრა 3.1.6. *ორი* $z_1:=(a_1,b_1)$ *და* $z_2:=(a_2,b_2)$ *კომპლექსური რიცხვის სხვაობა* ეწოდება ისეთ კომპლექსურ $z:=(a,b)$ რიცხვს, რომელსაც დამატებული z_2 მოგვცემს z_1-ს, $(z+z_2=z_1)$, რაც, (3.1.2)-ის თანახმად, იმას ნიშნავს, რომ $a+a_2=a_1$, $b+b_2=b_1$. აქედან $a=a_1-a_2$, $b=b_1-b_2$ და მივიღებთ, რომ

$$z=z_1-z_2=(a_1-a_2,b_1-b_2)\,. \tag{3.1.6}$$

განსაზღვრა 3.1.7. *ორი კომპლექსური* $z_1=(a_1,b_1)$ *და* $z_2=(a_2,b_2)$, $z_2\neq(0,0)$, *რიცხვის ფარდობა (შეფარდება)* ეწოდება ისეთ $z=(a,b)$ კომპლექსურ რიცხვს, რომლის z_2-ზე გამრავლებით მივიღებთ z_1-ს, ანუ

$$z_1=z\cdot z_2=(a,b)(a_2,b_2)=(aa_2-bb_2,ab_2+a_2b),$$

მეორე მხრივ, $z_1=(a_1,b_1)$. ვიცით, რომ ორი კომპლექური რიცხვი ტოლია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მათი ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილები ტოლია, ე. ი. მივიღებთ,

$$\begin{cases} a_2a-b_2b=a_1, \\ b_2a+a_2b=b_1. \end{cases}$$

ამოვხსნით რა მიღებულ წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემას a და b-ს მიმართ (იხ. ლექცია 6), დავადგენთ, რომ

$$a=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}\quad,\quad b=\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2},$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ საძიებელი რიცხვი

$$z=\frac{z_1}{z_2}=\left(\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2},\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}\right). \tag{3.1.7}$$

განსაზღვრა 3.1.8. $(0,1)$ *რიცხვს, რომელიც აღინიშნება* i *სიმბოლოთი, წარმოსახვითი ერთეული* ეწოდება:

$$(0,1)=:i. \tag{3.1.8}$$

თუ ამ რიცხვს გავამრავლებთ თავის თავზე, მაშინ, ორი კომპლექსური რიცხვის ნამრავლის განმარტების ძალით, გვექნება:

$$(0,1)\cdot(0,1)=(-1,0)=-1,\ \text{ე. ი.}\ i^2=-1. \tag{3.1.9}$$

ახლა შევეცადოთ, მოვძებნოთ (3.1.1) განტოლების ამონახსნი კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლეში. (3.1.1) გადავწეროთ შემდეგნაირად:

$$x^2=-1.$$

(3.1.9)-ის თანახმად, რიცხვი, რომლის კვადრატიც უდრის (-1)-ს, არის i, ე. ი. თუ გავითვალისწინებთ იმასაც, რომ $-i:=(-1)i$ და, ამღენად, $(-i)^2=(-1)^2i^2=-1$, (3.1.1) განტოლების ამონახსნი არის $x=\pm i$.

(3.1.5)-ის, (3.1.3)-ის და (3.1.8)-ის გათვალისწინებით შეგვიძლია დავწეროთ, რომ

$$i\cdot b=(0,1)(b,0)=(0-0,b+0)=(0,b).$$

ამიტომ

$$z=(a,b)=(a,0)+(0,b)=a+ib=a+bi,$$

რადგან $ib=(0,1)(b,0)=(b,0)(0,1)=bi$.

შემდგომში კომპლექსური $z=(a,b)$ რიცხვისთვის ვისარგებლებთ $z=a+ib$ წარმოდგენით, რომელსაც *კომპლექსური რიცხვის ალგებრული სახე* ეწოდება. კომპლექსური რიცხვის ასეთი წარმოდგენა და ის გარემოება, რომ $i^2=-1$, საშუალებას გვაძლევს, i სიმბოლოზე ვიმოქმედოთ ისე, როგორც რიცხვზე.

ახალ აღნიშვნებში (3.1.4) – (3.1.7) შეგვიძლია შემდეგნაირად გადავწეროთ:

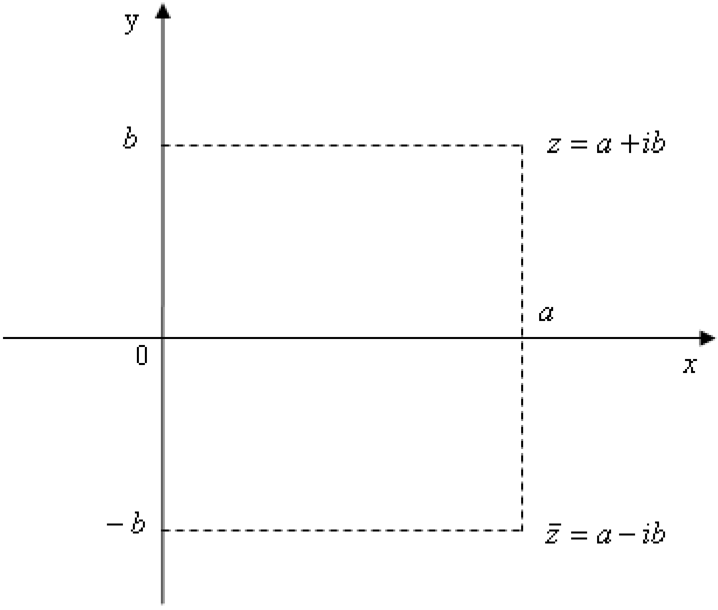
$$z=z_1+z_2=(a_1+a_2)+i(b_1+b_2),$$

$$z_1\cdot z_2=(a_1+ib_1)\cdot(a_2+ib_2)=(a_1a_2-b_1b_2)+i(a_1b_2+a_2b_1),$$

$$z_1-z_2=(a_1-a_2)+i(b_1-b_2),$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{a_1+ib_1}{a_2+ib_2}=\frac{(a_1+ib_1)(a_2-ib_2)}{(a_2+ib_2)(a_2-ib_2)}=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+i\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2},\ z_2=a_2+ib_2\neq0.$$

განსაზღვრა 3.1.9. $\bar{z}=a-ib$ სახის კომპლექსურ რიცხვს ეწოდება $z=a+ib$ *კომპლექსური რიცხვის შეუღლებული* (იხ. ნახ. 3.1.1).



ნახ. 3.1.1

ცხადია, სამართლიანია $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$ ტოლობა.

ადვილი შესამოწმებელია კომპლექსური რიცხვების შემდეგი თვისებები:

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} \,,$$
$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \,,$$
$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}, \quad z_2 \neq 0 = 0 + i0 = (0,0) \,,$$
$$\overline{\overline{z}} = z \,.$$

შენიშვნა 3.1.10. ორი კომპლექსური რიცხვის შეფარდების გამოთვლის დროს მოხერხებულია მნიშვნელისა და მრიცხველის მნიშვნელის შეუღლებულ რიცხვზე გამრავლება:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + i(a_2 b_1 - a_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2} \,.$$

3.2. კომპლექსური რიცხვის ტრიგონომეტრიული წარმოდგენა

განვიხილოთ კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლე და დავუკავშიროთ იგი სიბრტყის წერტილებს.

განვიხილოთ მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა, რომლის აბსცისთა ღერძი შევუსაბამოთ კომპლექსური რიცხვის ნამდვილ ნაწილს, ხოლო ორდინატთა ღერძი – წარმოსახვით ნაწილს. ასეთი კოორდინატთა სისტემის ყოველი $M(a,b)$ წერტილი (*აფიქსი*) შევუსაბამოთ კომპლექსურ $z = a + bi$ რიცხვს. ცხადია, ეს შესაბამისობა ცალსახაა და საკოორდინატო სისტემა სიბრტყეში წარმოქმნის *კომპლექსურ რიცხვთა სიბრტყეს.*

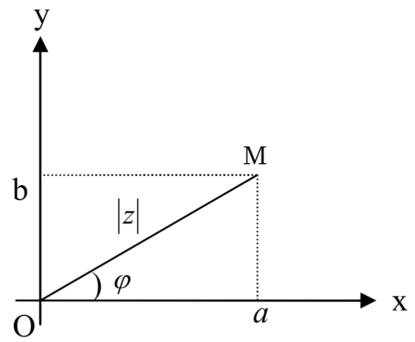
განსაზღვრა 3.2.1. $z = a + bi$ *კომპლექსური რიცხვის მოდული* (აღინიშნება r-ით ან $|z|$-ით) ეწოდება მანძილს კომპლექსურ რიცხვთა სიბრტყეზე z წერტილიდან სათავემდე (იხ. ნახ. 3.2.1).

ცხადია,

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \,.$$

ადვილი დასანახია, რომ ნამდვილი $z = a + 0i$ რიცხვის მოდული ემთხვევა a რიცხვის აბსოლუტურ სიდიდეს. მართლაც,

$$|z| = \sqrt{a^2 + 0^2} = \sqrt{a^2} = |a|.$$



ნახ. 3.2.1.

განსაზღვრა 3.2.2. $z \neq 0$ *კომპლექსური რიცხვის არგუმენტი* (აღინიშნება ასე φ ან $\arg z$)*) ეწოდება საკოორდინატო სიბრტყეზე z წერტილისა და სათავის შემაერთებელ წრფესა და ნამდვილ რიცხვთა ღერძის დადებით მიმართულებას შორის კუთხეს. φ კუთხის ათვლის დადებით მიმართულებად მიღებულია საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულება.

ნახ. 3.2.1-დან ცხადია, რომ, სინუსისა და კოსინუსის განმარტების თანახმად,

$$a = r\cos\varphi \quad \text{და} \quad b = r\sin\varphi,$$

ამდენად,

$$z = a + ib = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{3.2.1}$$

(3.2.1) ჩანაწერს ეწოდება *კომპლექსური რიცხვის ტრიგონომეტრიული წარმოდგენა.*

თუ გამოვიყენებთ *ეილერის*

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \;^{**)} \tag{3.2.2}$$

ფორმულას, (3.2.1) შეიძლება ჩავწეროთ მაჩვენებლიანი ფუნქციის საშუალებით

$$z = re^{i\varphi} \tag{3.2.3}$$

სახით. აქ e ე.წ. ნეპერის***) რიცხვია, რომელიც მეათედის სიზუსტით 2,7-ის ტოლია და არაერთხელ შეგვხვდება შემდეგ ლექციებში.

განვიხილოთ ტრიგონომეტრიული ფორმით ჩაწერილი ორი კომპლექსური

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \quad \text{და} \quad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

რიცხვი. სამართლიანია შემდეგი ფორმულები:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2\left[(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right], \tag{3.2.4}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right], \tag{3.2.5}$$

$$\left[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi), \tag{3.2.6}$$

სადაც $n \in N$, N ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეა.

(3.2.2) ფორმულას *მუავრის*****) *ფორმულა* ეწოდება.

---

*) ცხადია, $z := (a,b)$ კომპლექსური რიცხვის არგუმენტი φ-სთან ერთად $\varphi + 2\pi k$-ცაა, $k = \pm1, \pm2, \ldots$. ამდენად, კომპლექსური რიცხვის არგუმენტი ამ რიცხვით ცალსახად არ განისაზღვრება.

**) დამტკიცება იხილეთ მე-8 თავში (შენიშვნა 8.2.8)

***) ჯონ ნეპერი (1550-1617) – შოტლანდიელი მათემატიკოსი.

****) ა. დე მუავრი (1667 – 1754) – ინგლისელი მათემატიკოსი.

(3.2.4) და (3.2.5) ფორმულები მტკიცდება, შესაბამისად, უშუალო გამრავლებით და გაყოფით (იხ. შენიშვნა 3.1.10) და ტრიგონომეტრიიდან ცნობილი შეკრების ფორმულების გამოყენებით. მაგალითად,

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)}{r_2(\cos^2\varphi_2+\sin^2\varphi_2)}$$

$$=\frac{r_1}{r_2}\left[\cos\varphi_1\cos\varphi_2+\sin\varphi_1\sin\varphi_2+i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_2\cos\varphi_1)\right].$$

ეს ფორმულები შეიძლება მიღებულ იქნას აგრეთვე (3.2.2) და (3.2.3) ფორმულების საშუა-ლებითაც:

$$z_1\cdot z_2=r_1e^{i\varphi_1}\cdot r_2e^{i\varphi_2}=r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)};\qquad \frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1e^{i\varphi_1}}{r_2e^{i\varphi_2}}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}.$$

(3.2.6) ფორმულა მარტივად მტკიცდება (3.2.3)-ის გათვალისწინებით:

$$\left[r(\cos\varphi+i\sin\varphi)\right]^n=(re^{i\varphi})^n=r^ne^{in\varphi}=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi).$$

(3.2.6) ფორმულა, მაჩვენებლიანი სახით ჩაწერის გარეშე, მათემატიკური ინდუქციითაც მტკიცდება.