ლექცია 13

8. ფუნქციონალური მიმდევრობები და მწკრივები

8.1. ძირითადი ცნებები და თეორემები. მწკრივების კრებადობის ნიშნები

განსაზღვრა 8.1.1. თუ მიმდევრობის ან მწკრივის წევრები ფუნქციებია, მაშინ მათ *ფუნქციონალური მიმდევრობები* და *მწკრივები* ეწოდება.

თუ $f_n(x)$, $n=1,2,\dots$, ფუნქციები განსაზღვრულია $]a,b[$ ინტერვალზე, სადაც დასაშვებია $a=-\infty$ და $b=+\infty$, ან სასრულ $[a,b]$ სეგმენტზე, ან ნახევრად დახურულ $]a,b]$ ან $[a,b[$ ინტერვალებზე, მაშინ

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \dots,\ f_n(x),\ \dots \tag{8.1.1}$$

ფუნქციონალური მიმდევრობაა, ხოლო

$$f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_n(x)+\cdots=:\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \tag{8.1.2}$$

ფუნქციონალური მწკრივია.

განსაზღვრა 8.1.2. ვიტყვით, რომ (8.1.1) *მიმდევრობის ზღვარი* $f(x)$-ია, თუ ნებისმიერი დადებითი ε-სთვის ($\forall\varepsilon>0$) მოიძებნება ($\exists$) ისეთი ნომერი $N(\varepsilon,x)$, დამოკიდებული ε-ზე და, საზოგადოდ, x-ზე, რომ

$$\left|f_n(x)-f(x)\right|<\varepsilon,\ \text{როცა}\ \ n>N, \tag{8.1.3}$$

რაც შემდეგნაირად ჩაიწერება:

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x)=f(x),\ \ x\in]a,b[\,.$$

განსაზღვრა 8.1.3. ვიტყვით, რომ (8.1.1) *მიმდევრობა თანაბრად (x-ის მიმართ $]a,b[$ ინტერვალზე) მიისწრაფის* $f(x)$-ისკენ, თუ (8.1.3)-ში N ნომერი x-ზე არ არის დამოკიდებული.

ისევე როგორც რიცხვითი მწკრივების განხილვისას, (8.1.2) ფუნქციონალური მწკრივის ჯამი განიმარტება, როგორც მისი

$$S_n(x):=\sum_{k=1}^{n} f_k(x),\ \ n=1,2,\dots,$$

კერძო ჯამების მიმდევრობის $S(x)$ ზღვარი. თუ ასეთი ზღვარი რაიმე x-სთვის არ არსებობს, მწკრივს ამ x წერტილში *განშლადი მწკრივი* ეწოდება. თუ $S_n(x)$ კერძო ჯამების მიმდევრობა $]a,b[$ ინტერვალზე თანაბრად მიისწრაფის $S(x)$ ზღვრისკენ, მაშინ (8.1.2) მწკრივს *თანაბრად კრებადი მწკრივი* ეწოდება.

განსაზღვრა 8.1.4. (8.1.2) ფუნქციონალური მწკრივს ეწოდება *აბსოლუტურად კრებადი მწკრივი*, თუ (8.1.2) მწკრივთან ერთად კრებადია

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|f_k(x)\right|$$

მწკრივიც. წინააღმდეგ შემთხვევაში (8.1.2) მწკრივს *პირობითად კრებადი მწკრივი* ეწოდება.

აბსოლუტურად კრებად მწკრივში წევრთა გადანაცვლებით მწკრივის ჯამი არ იცვლება.

მწკრივის კრებადობისთვის აუცილებელია, მისი ზოგადი წევრი ნულისკენ მიისწრაფოდეს.[*)]

[*)] $\lim\limits_{n\to+\infty}(S_n-S_{n-1})=\lim\limits_{n\to+\infty} f_n=0$, რადგან

$\lim\limits_{n\to+\infty}(S_n-S_{n-1})=\lim\limits_{n\to+\infty} S_n-\lim\limits_{n\to+\infty} S_{n-1}=S-S=0$, სადაც S (1.6.2) მწკრივის ჯამია.

ნიშანცვლადი მწკრივი კრებადია, თუ ზოგადი წევრი ნულისკენ მიისწრაფის, ხოლო მწკრივის აბსოლუტური მნიშვნელობების მიმდევრობა კლებადია (ლაიბნიცის ნიშანი).

შედარების პრინციპი 8.1.5. თუ დადებით რიცხვთა

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

მწკრივი კრებადია და მოიძებნება ისეთი N, რომ

$$\left|f_k(x)\right| \le b_k,\ \ x \in]a,b[,\ \text{როცა}\ \ k \ge N,$$

მაშინ

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

მწკრივი თანაბრად და აბსოლუტურად კრებადია $]a,b[$ ინტერვალზე.

ყოველივე ზემოთქმული ვრცელდება სეგმენტზე და ნახევრად ღია ინტერვალებზე.

თეორემა 8.1.6. უწყვეტ ფუნქციათა თანაბრად კრებადი მიმდევრობის ზღვარი უწყვეტი ფუნქციაა.

მაგალითი 8.1.7. განვიხილოთ $[0,1]$ სეგმენტზე უწყვეტი

$$x^n,\ \ n = 1,2,\dots, \tag{8.1.4}$$

ფუნქციები. ცხადია, რომ

$$\lim_{n\to+\infty} x^n = \begin{cases} 0,\ \text{როცა}\ \ 0 \le x < 1, \\ 1,\ \text{როცა}\ \ x = 1. \end{cases} \tag{8.1.5}$$

ზღვარში მიღებული (8.1.5) ფუნქცია უწყვეტია $[0,1[$ ნახევრად ღია ინტერვალზე (იქ ნულის ტოლია), ხოლო $x = 1$ წერტილში წყვეტას განიცდის, რადგან იქ 1-ის ტოლია. ეს იმითაა გამოწვეული, რომ (8.1.4) მიმდევრობა თანაბრად კრებადი არაა $[0,1]$-ზე.

თეორემა 8.1.8. თანაბრად კრებადი ფუნქციონალური მწკრივის წევრ-წევრა ინტეგრება შეიძლება და მწკრივის წევრების ინტეგრალების ჯამი მწკრივის ჯამის ინტეგრალის ტოლია:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int f_k(x)dx = \int S(x)dx\,.$$

თეორემა 8.1.9. თუ ფუნქციონალური მწკრივი კრებადია და წევრ-წევრად გაწარმოებით მიღებული მწკრივი თანაბრად კრებადია, მაშინ მწკრივის წევრების წარმოებულების ჯამი მწკრივის ჯამის წარმოებულის ტოლია:

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^{'}(x) = S'(x)\,.$$

დასასრულ, მოვიყვანოთ ფუნქციონალური მწკრივების კრებადობის რამდენიმე კრიტერიუმი (ნიშანი).

***მწკრივის კრებადობის დ'ალამბერის*) კრიტერიუმი* ზღვრული ფორმით 8.1.10**. თუ არსებობს

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| = q(x)\,,$$

მაშინ (8.1.2) მწკრივი x წერტილში კრებადია, როცა $q(x) < 1$; განშლადია, როცა $q(x) > 1$; საჭიროებს დამატებით გამოკვლევას, როცა $q(x) = 1$ ან ზღვარი არ არსებობს.

***მწკრივის კრებადობის კოშის*) კრიტერიუმი* ზღვრული ფორმით 8.1.11**. თუ არსებობს

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left|f_n(x)\right|} = q(x)\,,$$

მაშინ (8.1.2) მწკრივი x წერტილში კრებადია, როცა $q(x) < 1$; განშლადია, როცა $q(x) > 1$; საჭიროებს დამატებით გამოკვლევას, როცა $q(x) = 1$ ან ზღვარი არ არსებობს.

---

*) ჟ. ლ. დ'ალამბერი (1717 – 1783) – ფრანგი მათემატიკოსი და ფილოსოფოსი.

*) ო. ლ. კოში (1789 – 1857) – ფრანგი მათემატიკოსი.

(8.1.2) მწკრივის ზოგადი წევრი ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$g(n,x) = f_n(x)\,.$$

***მწკრივის კრებადობის კოშის ინტეგრალური კრიტერიუმი* 8.1.12**. (8.1.2) მწკრივი x წერტილში კრებადია ან განშლადი იქიდან გამომდინარე,

$$\int_1^{+\infty} g(t,x)dt := \lim_{\tau\to+\infty}\int_1^{\tau} g(t,x)dt \tag{8.1.6}$$

არასაკუთრივი ინტეგრალი[*] x წერტილში სასრულია (კრებადია) თუ არა (განშლადია).

მაგალითი 8.1.13. გამოვიკვლიოთ

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha} + \cdots \tag{8.1.7}$$

რიცხვითი მწკრივის კრებადობის საკითხი.

გამოვიყენოთ კოშის ინტეგრალური კრიტერიუმი. ამისთვის უნდა განვიხილოთ

$$\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^\alpha} \tag{8.1.8}$$

არასაკუთრივი ინტეგრალის კრებადობის საკითხი. ვთქვათ, $\alpha \neq 1$, მაშინ

$$\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^\alpha} = \lim_{\tau\to+\infty}\int_1^{\tau}\frac{dt}{t^\alpha} = \lim_{\tau\to+\infty}\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\bigg|_1^{\tau} = \lim_{\tau\to+\infty}\left[\frac{\tau^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}\right] = \lim_{\tau\to+\infty}\frac{\tau^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} =$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{1}{1-\alpha}, \text{ როცა } \alpha > 1; \\ +\infty, \text{ როცა } \alpha < 1. \end{cases} \tag{8.1.9}$$

ვთქვათ, ახლა $\alpha = 1$, მაშინ

$$\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^\alpha} = \lim_{\tau\to+\infty}\int_1^{\tau}\frac{dt}{t} = \lim_{\tau\to+\infty}\ln t\big|_1^{\tau} = \lim_{\tau\to+\infty}\left[\ln\tau - \ln 1\right] = \lim_{\tau\to+\infty}\ln\tau = +\infty\,. \tag{8.1.10}$$

(8.1.9)-დან და (8.1.10)-დან გამომდინარეობს, რომ (8.1.8) არასაკუთრივი ინტეგრალი სასრულია (კრებადია), როცა $\alpha > 1$, და არაა სასრული ($+\infty$-აა, განშლადია), როცა $\alpha \le 1$. ამიტომ (8.1.7) მწკრივი კრებადია, როცა $\alpha > 1$ და განშლადია, როცა $\alpha \le 1$.

8.2. ხარისხოვანი მწკრივები. ტეილორის[**] და მაკლორენის[***] ფორმულები

$$a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \tag{8.2.1}$$

სახის მწკრივს *ხარისხოვანი მწკრივი* ეწოდება.

როცა $x = x_0$, (8.2.1) მწკრივის მხოლოდ პირველი წევრი a_0 დარჩება, ხოლო დანარჩენი ნულის ტოლია და, ამდენად, მწკრივი ამ წერტილში კრებადია.

კრებადობის რადიუსი 8.2.1. ყოველი ხარისხოვანი მწკრივისთვის არსებობს $0 \le \mathcal{R} \le \infty$ *რიცხვი, რომელსაც მწკრივის კრებადობის რადიუსი* ეწოდება, ისეთი რომ

(i) როცა $|x-x_0| < \mathcal{R}$, მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია;

(ii) როცა $|x-x_0| > \mathcal{R}$, მწკრივი განშლადია;

---

[*] თუ ინტეგრების ერთ-ერთი საზღვარი მაინც უსასრულოა ან ინტეგრალქვეშა ფუნქცია არ არის შემოსაზღვრული, *ინტეგრალს არასაკუთრივი* ეწოდება.

[**] ბ. ტეილორი (1685 – 1731) – ინგლისელი მათემატიკოსი.

[***] კ. მაკლორენი (1698 – 1746) – შოტლანდიელი მათემატიკოსი.

(iii) როცა $x = x_0 \pm \mathcal{R}$, მწკრივი შეიძლება იყოს ან აბსოლუტურად კრებადი, ან პირობითად კრებადი, ან განშლადი.

შევნიშნოთ, რომ ნებისმიერი $\mathcal{R}_0 < \mathcal{R}$-სთვის, ყოველ $[x_0 - \mathcal{R}_0, x_0 + \mathcal{R}_0] \subset]x_0 - \mathcal{R}, x_0 + \mathcal{R}[$ სეგმენტზე მწკრივი თანაბრად კრებადია.

თუ $\mathcal{R} = 0$, მწკრივი მხოლოდ x_0 წერტილშია კრებადი, ხოლო როცა $\mathcal{R} = \infty$, მწკრივი მთელ ღერძზეა კრებადი.

თუ არსებობს

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L,$$

მაშინ (8.2.1) ხარისხოვანი მწკრივის კრებადობის რადიუსი

$$\mathcal{R} = \frac{1}{L}.$$

მართლაც,

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{a_n(x-x_0)^n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||x-x_0| = L\cdot|x-x_0|,$$

საიდანაც, დ'ალამბერის კრიტერიუმის თანახმად, მწკრივი კრებადია, თუ

$$L\cdot|x-x_0| < 1, \text{ ე. ი. } |x-x_0| < \frac{1}{L} = \mathcal{R},$$

და განშლადია, თუ

$$L\cdot|x-x_0| > 1, \text{ ე. ი. } |x-x_0| > \frac{1}{L} = \mathcal{R}.$$

მაგალითი 8.2.2. განვიხილოთ (8.2.1) მწკრივი, როცა $x_0 = 0,\ a_0 = 0$ და $a_n = n!$, როცა $n \ge 1$ $(n! := 1\times 2\times\cdots\times n,\ 0! := 1)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n!x^n, \tag{8.2.2}$$

რადგან

$$\lim_{n\to+\infty} n!x^n = \infty, \text{ როცა } x \ne 0$$

და ამდენად, არ სრულდება მწკრივის კრებადობის აუცილებელი პირობა (ზოგადი წევრის ნულისაკენ მისწრაფება) და მწკრივი განშლადია, როცა $x \ne 0$. ამრიგად, (8.2.2) მწკრივი კრებადია მხოლოდ $x = 0$ წერტილში, სადაც, როგორც ნულების უსასრულო ჯამი ნულის ტოლია, ე. ი. $\mathcal{R} = 0$.

(ტეილორის) თეორემა 8.2.3. ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქციას x_0 წერტილის რაიმე მიდამოში აქვს $n+1$ რიგამდე ჩათვლით უწყვეტი წარმოებულები და x ნებისმიერი წერტილია ამ მიდამოში, მაშინ არსებობს ისეთი ξ $(x_0 < \xi < x$ ან $x < \xi < x_0)$, რომ

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \cdots \\ + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_{n+1}(x), \end{aligned} \tag{8.2.3}$$

სადაც

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

ამ უკანასკნელს ლაგრანჟის სახით ნაშთითი წევრი ეწოდება.

შედეგი 8.2.4. თუ $f(x)$ ფუნქციას აქვს ყველა რიგის უწყვეტი წარმოებული $]x_0-\mathcal{R},\, x_0+\mathcal{R}[$, $\mathcal{R}\neq 0$, ინტერვალზე და ყველა n-ისთვის $(n=0,1,2,\dots)$ და ყველა x-ისთვის, $x\in]x_0-\mathcal{R},x_0+\mathcal{R}[$, თანაბრად

$$\left|f^{(n+1)}(x)\right|\leq M\ ,$$

მაშინ, რადგან ფაქტორიალი უფრო სწრაფად მიისწრაფის უსასრულობისკენ, ვიდრე მაჩვენებლიანი ფუნქცია,

$$\lim_{n\to+\infty} R_{n+1}(x)=0\quad \forall x\in]x_0-\mathcal{R},\, x_0+\mathcal{R}[$$

და $f(x)$ ფუნქცია $]x_0-\mathcal{R},\, x_0+\mathcal{R}[$ ინტერვალზე იშლება *ტეილორის*

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

მწკრივად.

განსაზღვრა 8.2.5. (8.2.3) ფორმულას ეწოდება *ტეილორის ფორმულა* ლაგრანჟის $R_{n+1}(x)$ ნაშთითი წევრით, ხოლო მის კერძო შემთხვევას, როცა $x_0=0$, – *მაკლორენის ფორმულა.*

მაკლორენის ფორმულას e^x, $\sin x$ და $\cos x$ ფუნქციებისთვის, რომლებსაც მთელ ღერძზე ნებისმიერი რიგის უწყვეტი წარმოებულები გააჩნიათ, აქვს შემდეგი სახე:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^{\xi}x^{n+1}}{(n+1)!},\ \ x\in]-\infty,+\infty[\,, \tag{8.2.4}$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\dots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\cos\xi\,,\ \ x\in]-\infty,+\infty[\,, \tag{8.2.5}$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}\sin\xi\,,\ \ x\in]-\infty,+\infty[\,. \tag{8.2.6}$$

სამივე შემთხვევაში ნაშთითი წევრი ნულისკენ მიისწრაფის, როცა $n\to+\infty$, რადგან $e^{\xi}<e^{H}$ ნებისმიერ $]-H,H[$, $H>0$, ინტერვალზე, ხოლო $|\cos\xi|\leq 1$ და $|\sin\xi|\leq 1$ მთელ ღერძზე (იხ. შედეგი 8.2.4). ამიტომ, თუ (8.2.4) – (8.2.6) ტოლობებში ზღვარზე გადავალთ, როცა $n\to+\infty$, მივიღებთ e^x, $\sin x$ და $\cos x$ ფუნქციების გაშლას ხარისხოვან (ტეილორის) მწკრივებად:

$$e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!},\quad x\in]-\infty,+\infty[\,, \tag{8.2.7}$$

$$\cos x=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!},\ \ x\in]-\infty,+\infty[\,, \tag{8.2.8}$$

$$\sin x=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!},\ \ x\in]-\infty,+\infty[\,. \tag{8.2.9}$$

(8.2.7)–(8.2.9) ფორმულები სამართლიანია კომპლექსურ სიბრტყეშიც (იხ. § 3.2).

განსაზღვრა 8.2.6. თუ ფუნქცია რაიმე ინტერვალზე (კომპლექსური სიბრტყის რაიმე არე-ზე) ხარისხოვან მწკრივად იშლება, მას ეწოდება *ანალიზური ფუნქცია* ამ ინტერვალზე (არეში).

ფუნქცია ანალიზურია რაიმე x_0 წერტილში, თუ ის ანალიზურია ამ წერტილის რაიმე $]x_0-\delta,x_0+\delta[$, $\delta>0$, მიდამოში.

ხარისხოვანი ფუნქცია ანალიზურია მისი კრებადობის ნებისმიერ წერტილში.

შენიშვნა 8.2.7. არსებობს ისეთი $f(x)$ ფუნქციის მაგალითი, რომელსაც აქვს ყველა რიგის წარმოებული x_0-ის მიდამოში, მაგრამ ანალიზური არ არის. ასეთ შემთხვევაში ან მისი ტე-

ილორის მწკრივის კრებადობის რადიუსი $\mathcal{R} = 0$ (იხ. (8.2.2)), ან მისი ტეილორის მწკრივი $f(x)$-ისკენ კრებადი არ არის. მაგალითად,

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, \text{ როცა } x \neq 0, \\ 0, \text{ როცა } x = 0, \end{cases}$$

ფუნქციას აქვს ყველა რიგის წარმოებული მთელ ღერძზე, მაგრამ $x = 0$ წერტილში ანალიზური არაა, რადგან წარმოებულის განმარტების თანახმად,

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{-\frac{1}{(\Delta x)^2}}}{\Delta x} = 0,$$

ვინაიდან მაჩვენებლიანი ფუნქცია თავისი ზღვრისკენ (ჩვენ შემთხვევაში 0-სკენ) უფრო სწრაფად მიისწრაფის, ვიდრე ხარისხოვანი ფუნქცია თავისი ზღვრისკენ (ჩვენ შემთხვევაში 0-სკენ); ანალოგიურად დავამტკიცებთ, რომ

$$f^{(i)}(0) = 0, \ \ i = 2, \dots,$$

და, ამდენად, $x = 0$ წერტილის მიდამოში მისი ტეილორის მწკრივის ყველა კოეფიციენტი და, აქედან გამომდინარე, მწკრივის ჯამი ნულის ტოლია; თუმცა $f(x) > 0$, როცა $x \neq 0$.

შენიშვნა 8.2.8. თუ ნამდვილი ცვლადის ფუნქციას აქვს პირველი რიგის წარმოებული, ეს სულაც არ ნიშნავს, რომ მას მეორე რიგის წარმოებულიც აქვს, მაშინ, როდესაც კომპლექსური ცვლადის ფუნქციას პირველი რიგის წარმოებულთან ერთად ნებისმიერი რიგის წარმოებული გააჩნია.

თუ (8.2.7)-ში x-ის ნაცვლად ix-ს, სადაც i წარმოსახვითი ერთეულია (იხ. განსაზღვრა 3.1.8), ჩავსვამთ და ხარისხოვანი მწკრივის აბსოლუტურად კრებადობას გავითვალისწინებთ, გვექნება, რომ

$$\begin{aligned} e^{ix} &= 1 + \frac{ix}{1!} + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \cdots = 1 + \frac{ix}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + i\left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots\right) = \cos x + i \sin x. \end{aligned} \tag{8.2.10}$$

უკანასკნელი ტოლობის დასაწერად მხედველობაში მივიღეთ (8.2.8) და (8.2.9) ფორმულები.

(8.2.10) ფორმულას *ეილერის*[*)] *ფორმულა* ეწოდება.

[*)] ლ. ეილერი (1707 – 1783) – მათემატიკოსი, მექანიკოსი და ფიზიკოსი.