ლექცია 12

7. ინტეგრალი

7.1. ინტეგრალის ცნება. ფართი

შემოვიღოთ განსაზღვრული ინტეგრალის ცნება 6.1 პარაგრაფში შემოღებული ცნებისგან განსხვავებული ფორმით.

განსაზღვრა 7.1.1. $f \ge 0$ *ფუნქციის განსაზღვრული ინტეგრალი* $[a,b]$ სეგმენტზე, რომელიც

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f$$

სახით ჩაიწერება, წარმოადგენს იმ ფიგურის ფართს, რომელიც შემოსაზღვრულია

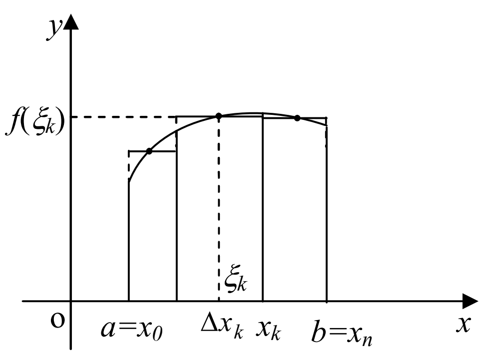
$$y = f(x)$$

ფუნქციის გრაფიკით და

$$y = 0, \quad x = a \quad \text{და} \quad x = b$$

წრფეებით (იხ. ნახ. 7.1.1). აღნიშნული ფიგურის ფართს შეიძლება მივუახლოვდეთ ნახაზზე დახაზული მართკუთხედების ფართების ჯამის ზღვრის სახით, როცა მართკუთხედების მაქსიმალური სიგანე ნულისკენ მიისწრაფის:

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\substack{(\max \Delta x_k) \to 0 \\ (n \to \infty)}} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k, \quad \Delta x_k := x_k - x_{k-1}, \quad (7.1.1)$$



ნახ. 7.1.1

ეს ზღვარი დამოკიდებული არ უნდა იყოს ქვეინტერვალებად დაყოფაზე და ξ_k წერტილების შერჩევაზე. თუ არსებობს (7.1.1) ზღვარი, f ფუნქციას $[a,b]$-ზე ინტეგრებადი ფუნქცია ეწოდება.

თუ

$$f(x) = c = \text{const},$$

რადგან მართკუთხედის ფართობი მისი სიგრძისა და სიგანის ნამრავლის ტოლია, ნახ. 7.1.1-დან, ცხადია,

$$\int_a^b cdx = c(b-a).$$

ეს უკანასკნელი უშუალოდ გამომდინარეობს (7.1.1)-დანაც.

განსაზღვრა 7.1.2. f ფუნქციის დადებითობა ჩვენ მხოლოდ ფართის ცნებასთან მიმართებაში თვალსაჩინოებისთვის მოვითხოვეთ. (7.1.1) ტოლობით *განსაზღვრული ინტეგრალის* ცნების გამოყენება მაშინაც შეიძლება, როცა f ფუნქცია უარყოფით მნიშვნელობებსაც იღებს.

განსაზღვრა 7.1.3. თუ $a > b$, მაშინ

$$\int_a^b f(x)dx := -\int_b^a f(x)dx.$$

თეორემა 7.1.4. ვთქვათ, f და g ფუნქციები ინტეგრებადია $[a,b]$-ზე და c მუდმივია, მაშინ:

1. $\int_a^b cf = c\int_a^b f$;

2. $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$;

3. $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$, სადაც $c \in]a,b[$;

4. $\left|\int_a^b f\right| \le \int_a^b |f|$;

5. თუ $f \le g$ და $a < b$, მაშინ $\int_a^b f \le \int_a^b g$.

განსაზღვრული ინტეგრალის ყველა ეს თვისება ადვილად მტკიცდება რიმანის*) ინტეგრალის ზემოთ მოყვანილი განმარტებიდან გამომდინარე.

შედეგი 7.1.5. თუ f უწყვეტი ფუნქციაა $[a,b]$-ზე, მაშინ

$$(b-a)\min_{a\le x\le b} f(x) \le \int_a^b f(x)dx \le (b-a)\max_{a\le x\le b} f(x) .$$

დამტკიცება. თუ გამოვიყენებთ 7.1.4 თეორემის მე-5 თვისებას, სადაც

$$g \equiv \max_{a\le x\le b} f(x) =: c = \text{const} ,$$

მივიღებთ, რომ

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b cdx = c(b-a) .$$

ანალოგიურად მიიღება ქვემოდან შეფასება.

ნიადაგში წყლის ინფილტრაცია – ფილიპსის მოდელი. პირობების ფართო დიაპაზონში,

$$y = a + bx^{-1/2} \tag{7.1.2}$$

სახის ფუნქცია ნიადაგში წყლის ინფილტრაციის y სიჩქარეს აკავშირებს x დროსთან (Philips, 1957-1958). ატმოსფერული ნალექები წარმოადგენს სითხეს თხევად ან მყარ მდგომარეობაში (წვიმა, თოვლი, ჰიდრომეტეორიტები და ა. შ.) მოსულს ღრუბლებიდან ან დალექილს ჰაერიდან მიწის ზედაპირზე და საგნებზე. ის იზომება მოსული წყლის ფენის სისქით მილიმეტრებში (მმ). წყლის ნიადაგში ინფილტრაციის სიჩქარე იზომება მმ/სთ-ში. კონკრეტულ სიტუაციაში (7.1.2) დამოკიდებულების გამოყენება დამოკიდებულია მინიმალურ სიჩქარეზე რითაც წყალი ჟონავს ნიადაგში ამ უკანასკნელის სრულად გაჯერებამდე. ეს მინიმალური სიჩქარე (7.1.2) ფორმულაში წარმოდგენილია a მუდმივით, რომელიც თავის მხრივ დამოკიდებულია ნიადაგის ტიპზე. მეორე წევრი (7.1.2)-ის მარჯვენა მხარეში მიუთითებს იმაზე, რომ ინფილტრაციის სიჩქარის ცვლილება შეიძლება გამოვხატოთ ინფილტრაციის დაწყების მომენტიდან განვლილი დროის მონაკვეთისა (უფრო ზუსტად, $x^{-\frac{1}{2}}$-ის) და b მუდმივის ნამრავლით, რომელიც ახასიათებს ნიადაგის ტენიანობის**) ხარისხს. თუ ინფილტრაციის დაწყების მომენტისათვის ნიადაგი წყლით თითქმის გაჯერებულია, მაშინ ეს წევრი ძალზე მცირე იქნება, რადგან, როცა $b=0$, ჩვენ გვექნება ინფილტრაციის სიჩქარე წყლით გაჯერებული ნიადაგის პირობებში.

---

*) გ. ფ. ბ. რიმანი (1826 – 1866) – გერმანელი მათემატიკოსი.

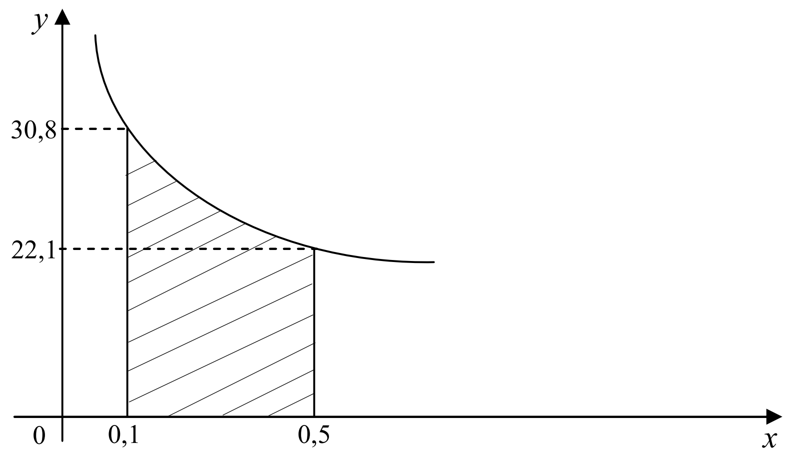
**) ტენიანობას ახასიათებენ ტენშემცველობით – წყლის რაოდენობით, რომელიც მოდის მასალის მშრალი ნაწილის ერთეულ მასაზე.

ვთქვათ, მოცემული ადგილისათვის (7.1.2)-ს აქვს

$$y = 15 + 5x^{-1/2} \tag{7.1.3}$$

სახე. მისი საშუალებით შეიძლება ინფილტრაციის სიჩქარის გამოთვლა დროის ნებისმიერ მომენტში (სიჩქარე გამოთვლილია მეათედის სიზუსტით):

$x=$	0,1	0,2	0,5	1,0	2,0	5,0	სთ
$y=$	30,8	26,2	22,1	20,0	18,5	17,2	მმ/სთ



ნახ. 7.1.2.

ფართი $y = 15 + 5x^{-1/2}$ წირის ქვეშ შემოსაზღვრული $y = 0,\ x = 0{,}1$ და $x = 0{,}5$ წრფეებით

წყლის საერთო რაოდენობა (Q), რომელიც იჟონება ნიადაგში დროის გარკვეულ შუალედში, გრაფიკულად წარმოადგენს იმ გეომეტრიული ნაკვთის ფართს, რომელიც შემოსაზღვრულია (7.1.3) წირით, აბცისთა ღერძით და დროის ინტერვალის საზღვრებით აბცისათა ღერძზე (უფრო ზუსტად, მათზე y ღერძის პარალელურად გავლებული წრფეებით). (Q) სიდიდის განზომილებაა

$$\frac{\text{მმ}}{\text{სთ}}\,\text{სთ} = \text{მმ}$$

ვთქვათ, უნდა გამოვთვალოთ ნიადაგში ჩაჟონილი წყლის საერთო რაოდენობა დროის $]0{,}1;0{,}5[$ ინტერვალში. ე.ი. ჩვენ უნდა გამოვთვალოთ ნახ. 7.1.2-ზე დაშტრიხული ფართის ფართობი, რომელიც, როგორც ეს ამ პარაგრაფში ვნახეთ, შემდეგი ინტეგრალის

$$\int_{0.1}^{0.5}(15+5x^{-1/2})dx = \int_{0.1}^{0.5}15dx + \int_{0.1}^{0.5}5x^{-1/2}dx = 15\cdot 0{,}4 + 5\cdot\left.\frac{x^{1/2}}{1/2}\right|_{0,1}^{0,5} = 6+10\left(\sqrt{0{,}5}-\sqrt{0{,}1}\right)$$

$$= 6+10\left(0{,}7071067-0{,}3162277\right) = 6+10\cdot 0{,}390879 = 9{,}90879 \ \ (\text{მმ})$$

ტოლია (ფესვები ამოღებულია მეათმილიონედის სიზუსტით).

7.2. კალკულუსის ძირითადი თეორემა

თეორემა 7.2.1. თუ f უწყვეტი ფუნქციაა ღია ინტერვალზე, რომელიც $[a,b]$ სეგმენტს შეიცავს, მაშინ:

1. $$\frac{d}{db}\int_a^b f(x)dx = f(b);\tag{7.2.1}$$

2. თუ $f(x) = F'(x)$, მაშინ $$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b := F(b) - F(a).\tag{7.2.2}$$

(7.2.2) ფორმულას *ნიუტონ-ლაიბნიცის ფორმულა* ეწოდება, რომელიც 6.1 პარაგრაფში განსაზღვრული ინტეგრალის განმარტებად მივიღეთ. $F(x)$ ფუნქციას, როგორც ეს 6.1 პარაგრაფში იყო აღნიშნული, ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის პირველყოფილი, პრიმიტიული ფუნქცია. მას უწოდებენ აგრეთვე ანტიწარმოებულს ან *განუსაზღვრელ ინტეგრალს* და წერენ $\int f(x)dx$ ფორმითაც.

დამტკიცება. წარმოებულის ცნების შესაბამისად

$$\frac{d}{db}\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta b\to 0}\frac{\int_a^{b+\Delta b} f - \int_a^b f}{\Delta b} = \lim_{\Delta b\to 0}\frac{\int_a^{b+\Delta b} f + \int_b^a f}{\Delta b} = \lim_{\Delta b\to 0}\frac{\int_b^{b+\Delta b} f}{\Delta b}.\tag{7.2.3}$$

ვთქვათ, $\Delta b > 0$, მაშინ, 7.1.5 შედეგის თანახმად,

$$\Delta b \min_{b\le x\le b+\Delta b} f(x) \le \int_b^{b+\Delta b} f(x)dx \le \Delta b \max_{b\le x\le b+\Delta b} f(x),\tag{7.2.4}$$

ე. ი. Δb-ზე გაყოფის შემდეგ,

$$\min_{b\le x\le b+\Delta b} f(x) \le \frac{\int_b^{b+\Delta b} f(x)dx}{\Delta b} \le \max_{b\le x\le b+\Delta b} f(x).$$

თუ Δb-ს ნულისკენ მივასწრაფებთ, მივიღებთ, რომ

$$f(b) \le \lim_{\Delta b\to 0+}\frac{\int_b^{b+\Delta b} f(x)dx}{\Delta b} \le f(b)$$

საიდანაც

$$\lim_{\Delta b\to 0+}\frac{\int_b^{b+\Delta b} f(x)dx}{\Delta b} = f(b).\tag{7.2.5}$$

როცა $\Delta b < 0$, მაშინ (7.2.4)-ის ანალოგიურად მივიღებთ, რომ

$$(-\Delta b)\min_{b+\Delta b\le x\le b} f(x) \le \int_{b+\Delta b}^b f(x)dx \le (-\Delta b)\max_{b+\Delta b\le x\le b} f(x),$$

საიდანაც, $(-\Delta b)$-ზე გაყოფისა და 7.1.3 განსაზღვრის გათვალისწინებით, გამომდინარეობს, რომ

$$\min_{b+\Delta b\le x\le b} f(x) \le \frac{\int_b^{b+\Delta b} f(x)dx}{\Delta b} = \frac{\int_{b+\Delta b}^b f(x)dx}{-\Delta b} \le \max_{b+\Delta b\le x\le b} f(x).$$

აქედან, Δb-ს ნულისკენ მისწრაფების შემდეგ, მივიღებთ

$$\lim_{\Delta b\to 0-}\frac{\int_b^{b+\Delta b} f(x)dx}{\Delta b} = f(b).\tag{7.2.6}$$

რადგან (7.2.5) მარჯვენა და (7.2.6) მარცხენა ზღვრები ტოლია, ამიტომ არსებობს

$$\lim_{\Delta b \to 0} \frac{\int\limits_{b}^{b+\Delta b} f(x)dx}{\Delta b} = f(b). \tag{7.2.7}$$

(7.2.3)-დან და (7.2.7)-დან გამომდინარეობს (7.2.1).

თუ (7.2.1)-ს გამოვიყენებთ, გვექნება, რომ $\forall x \in [a,b]$-სთვის

$$\frac{d}{dx}\left(F(x) - \int\limits_{a}^{x} f(t)dt \right) = F'(x) - \frac{d}{dx}\int\limits_{a}^{x} f(t)dt = f(x) - f(x) = 0 .$$

ცნობილია, რომ თუ რაიმე ინტერვალზე ფუნქციის წარმოებული ნულის ტოლია, მაშინ ეს ფუნქცია რაიმე C მუდმივის ტოლია*). ამიტომ

$$F(x) - \int\limits_{a}^{x} f(t)dt = C . \tag{7.2.8}$$

თუ ამ უკანასკნელში ჩავსვამთ

$$x = a ,$$

მივიღებთ, რომ

$$F(a) - \int\limits_{a}^{a} f(t)dt = C ,$$

საიდანაც

$$C = F(a) . \tag{7.2.9}$$

ამდენად, (7.2.8)-დან და (7.2.9)-დან დავასკვნით, რომ

$$\int\limits_{a}^{x} f(t)dt = F(x) - F(a) . \tag{7.2.10}$$

თუ (7.2.10)-ში ჩავსვამთ

$$x = b ,$$

ცხადია,

$$\int\limits_{a}^{b} f(t)dt = F(b) - F(a) .$$

რაც ემთხვევა (7.2.2)-ს, რადგან ადვილი მისახვედრია, რომ ინტეგრალის მნიშვნელობა საინ-ტეგრაციო ცვლადზე დამოკიდებული არ არის.

*) ამის მკაცრად დასამტკიცებლად უნდა გამოვიყენოთ ლაგრანჟის თეორემა საშუალო მნიშვნელობის შესახებ, რომელიც ჩვენი კურსით გათვალისწინებული არ არის. თუმცა მექანიკური მოსაზრებით ის ცხადია. მართლაც, თუ $s = f(t)$ გამოხატავს მატერიალური წერტილის მოძრაობას წრფის გასწვრივ, ამასთან მისი სიჩქარე, როცა $t \geq t_0$, იგივურად ნულის ტოლია $v = f'(t) \equiv 0$, მაშინ, როცა $t \geq t_0$, წერტილი ადგილზეა გაჩერებული და საწყის O წერტილამდე s მანძილი დროის ყოველ მომენტში არ იცვლება, ე.ი., მუდმივია.

7.3. წირითი ინტეგრალი

განვიხილოთ სივრცეში დეკარტის $Oxyz$ კოორდინატთა სისტემა. ვთქვათ, Γ რაიმე წირია, რომელიც მოცემულია

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \tag{7.3.1}$$

განტოლებებით, სადაც t წარმოადგენს $[\alpha, \beta]$ სეგმენტზე ცვლად პარამეტრს, ხოლო $x(t), y(t), z(t)$ კი ამ პარამეტრის სამი უწყვეტი ფუნქციაა. ასეთ წირს ჟორდანის[*)] წირი ეწოდება.

ჟორდანის წირს მარტივი ეწოდება, თუ პარამეტრის ორ სხვადასხვა მნიშვნელობას ამ წირის ორი სხვადასხვა წერტილი შეესაბამება, გარდა, შესაძლებელია იმ შემთხვევისა, როცა $t_1 = \alpha$ და $t_2 = \beta$. სხვანაირად რომ ვთქვათ, ჟორდანის წირი მარტივია, თუ $t_1 \neq t_2$ $(t_1, t_2 \in [\alpha, \beta])$ უტოლობას შედეგად მოსდევს

$$[x(t_1) - x(t_2)]^2 + [y(t_1) - y(t_2)]^2 + [z(t_1) - z(t_2)]^2 \neq 0 ,$$

გარდა, შესაძლებელია, იმ შემთხვევისა, როცა $t_1 = \alpha$, $t_2 = \beta$.

როცა პარამეტრის $t_1 = \alpha$ და $t_2 = \beta$ მნიშვნელობებს ჟორდანის წირის ორი სხვადასხვა წერტილი შეესაბამება, წირს გახსნილს ვუწოდებთ. ასეთ შემთხვევაში პარამეტრის $t = \alpha$ და $t = \beta$ მნიშვნელობათა შესაბამის წერტილებს Γ წირის ბოლოები ეწოდება.

როცა

$$x(\alpha) = x(\beta), \quad y(\alpha) = y(\beta), \quad z(\alpha) = z(\beta).$$

ჟორდანის წირს შეკრული ეწოდება.

ადვილი მისახვედრია, რომ ჟორდანის მარტივი გახსნილი წირი $[\alpha, \beta]$ მონაკვეთის ურთიერთცალსახა და უწყვეტი ასახვაა. სავსებით ასევე, ჟორდანის მარტივი, შეკრული წირი წრეწირის ურთიერთცალსახა და უწყვეტ ასახვას წარმოადგენს.

ვიგულისხმოთ, რომ ჟორდანის (7.3.1) წირზე განსაზღვრულია წერტილის $f(M)$ ფუნქცია. ეს იმას ნიშნავს, რომ (7.3.1) წირის ყოველ M წერტილს შეესაბამება გარკვეული $f(M)$ მნიშვნელობა. ცხადია, $f(M)$ ფუნქცია შესაძლებელია განვიხილოთ, როგორც x, y, z ცვლადების ფუნქცია, სადაც (x, y, z) ანუ M წერტილი (7.3.1) წირზეა მოთავსებული. ამგვარად, ნაცვლად $f(M)$ გამოსახულებისა, შეიძლება ვწეროთ $f(x, y, z)$, სადაც (x, y, z) წერტილი (7.3.1) წირს ეკუთვნის.

თავის მხრივ, x, y, z კოორდინატები (7.3.1) განტოლებებითაა განსაზღვრული და ამიტომ $f(M)$ შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ როგორც t პარამეტრის რთული ფუნქცია:

$$f(M) = f[x(t), y(t), z(t)], \qquad \alpha \leq t \leq \beta .$$

განვიხილოთ ჟორდანის მარტივი (გახსნილი ან შეკრული) Γ წირი და ამ წირზე განსაზღვრული $w = f(M) = f(x, y, z)$ ფუნქცია.

ასეთ ფუნქციას უწყვეტი ეწოდება Γ წირის რაიმე M წერტილში, თუ ყოველ დადებით ε რიცხვს ისეთი დადებითი δ შეესაბამება, რომ, როცა $M \in \Gamma$ და $\rho(M, M_0) < \delta$ ($\rho(M, M_0)$ აღნიშნავს მანძილს M და M_0 წერტილს შორის), გვექნება

$$|f(M) - f(M_0)| < \varepsilon.$$

Γ წირზე განსაზღვრულ $w = f(M)$ ფუნქციას უწყვეტი ეწოდება მთელს ამ წირზე, როცა ეს ფუნქცია უწყვეტია ამ უკანასკნელის ყოველ წერტილში.

[*)] მ. ე. კ. ჟორდანი (Marie Ennemond Camille Jordan, 5.1.1838 – 22.1.1922)

თეორემა 7.3.1. ჟორდანის ნებისმიერ Γ წირზე განსაზღვრული, უწყვეტი $f(M)$ ფუნქცია შემოსაზღვრულია, ე.ი. მოიძებნება ისეთი დადებითი A რიცხვი, რომ Γ წირის ყოველ M წერტილში გვექნება

$$|f(M)| \le A.$$

თეორემა 7.3.2. ჟორდანის Γ წირზე უწყვეტი $f(M)$ ფუნქცია თანაბრად უწყვეტია ამ წირზე, ე.ი. ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის ისეთი $\delta > 0$ რიცხვი მოიძებნება, რომ, როცა

$$M \in \Gamma, \quad N \in \Gamma, \quad \rho(M,N) < \delta,$$

გვექნება

$$|f(M) - f(N)| < \varepsilon.$$

თეორემა 7.3.3. ჟორდანის Γ წირზე უწყვეტი ფუნქცია, განხილული როგორც t ცვლადის რთული $f(x(t), y(t), z(t))$ ფუნქცია, უწყვეტია t-ს მიმართ მთელს $[\alpha, \beta]$ სეგმენტზე და, მაშასადამე, თანაბრად უწყვეტია t-ს მიმართ, როცა

$$\alpha \le t \le \beta.$$

განვიხილოთ რაიმე წრფევადი (ე.ი. სიგრძის მქონე) ჟორდანის Γ წირი, განსაზღვრული (7.3.1) განტოლებებით, სადაც $x(t), y(t)$ და $z(t)$ უწყვეტი ფუნქციებია $[\alpha, \beta]$ სეგმენტზე. ვიგულისხმოთ, რომ Γ წირზე განსაზღვრულია წერტილის $f(M)$ ფუნქცია. აღვნიშნოთ A-თი Γ წირის ის წერტილი, რომელსაც პარამეტრის $t = \alpha$ მნიშვნელობა შეესაბამება, ხოლო B-თი – ის წერტილი, რომელსაც შეესაბამება $t = \beta$ მნიშვნელობა. ვიმოძრაოთ Γ-ს გასწვრივ A-დან B წერტილისაკენ და აღვნიშნოთ Γ-ზე მიმდევრობით $M_1, M_2, ..., M_{n-1}$ წერტილები. აღვნიშნოთ, ზოგადობისათვის, $A = M_0$-ით, $B = M_n$-ით.

ცხადია, რომ Γ წირის ყოველი $M_k M_{k+1}$ რკალი $(k = 0,1,2,..,n-1)$ აგრეთვე წრფევადია. აღვნიშნოთ თითოეული ამ რკალის სირგძე s_k-თი $(k = 0,1,2,..,n-1)$. ავიღოთ $M_k M_{k+1}$ რკალზე $(k = 0,1,2,..,n-1)$ თითო P_k წერტილი $(P_k \in M_k M_{k+1};\ k = 0,1,2,..,n-1)$ და შევადგინოთ ჯამი

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(P_k) s_k. \tag{7.3.2}$$

ამ ჯამს f ფუნქციის რიმანის ჯამი ეწოდება Γ წირის აღებული დანაწილებისა და არჩეული P_k $(k = 0,1,2,..,n-1)$ წერტილებისათვის.

წარმოვიდგინოთ, რომ $n \to \infty$, ისე, რომ თითოეული შემადგენელი $M_k M_{k+1}$ რკალის დიამეტრიც (რაიმე სიმრავლის დიამეტრი ამ სიმრავლეში შემავალი ნებისმიერ ორ წერტილს შორის მანძილთა სიმრავლის ზუსტ ზედა ზღვარს ეწოდება) მიისწრაფის ნულისკენ. თუ, ასეთ შემთხვევაში, არსებობს (7.3.2) ჯამის გარკვეული ზღვარი, რომელიც არაა დამოკიდებული არც დაყოფის წესისა და არც P_k $(k = 0,1,2,..,n-1)$ წერტილების შერჩევაზე, მაშინ ამ ზღვარს ეწოდება $f(M)$ ფუნქციის *პირველი გვარის წირითი ინტეგრალი* Γ წირზე და მას ასე აღნიშნავენ:

$$\int_\Gamma f(M)ds = \int_{AB} f(M)ds = \int_{AB} f(x,y,z)ds$$

ამრიგად,

$$\int_{AB} f(M)ds = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(P_k) s_k,$$

სადაც λ აღნიშნავს $M_k M_{k+1}\,(k = 0,1,2,..,n-1)$ შემადგენელი რკალების დიამეტრთა შორის უდიდესს.

ადვილი მისახვედრია, რომ წირზე პირველად არჩეული (A-დან B-საკენ) მოძრაობის მიმართულების შეცვლა შებრუნებული (ე.ი. B-დან A-საკენ) მიმართულებით ინტეგრალის განსაზღვრაში ცვლილებას არ გამოიწვევს, რადგან $M_k M_{k+1}$ რკალის სიგრძე ჩვენ წმინდა გეომეტრიული აზრით გვესმის. ამგვარად ინტეგრების მიმართულებას გავლენა არა აქვს პირველი გვარის წირითი ინტეგრალის მნიშვნელობაზე, ე.ი.

$$\int_{AB} f(M)ds = \int_{BA} f(M)ds.$$

სამართლიანია შემდეგი ტოლობები:

$$\int_{AB} Kf(M)ds = K\int_{AB} f(M)ds, \quad K = const;$$

$$\int_{AB} [f(M) \pm \varphi(M)]ds = \int_{AB} f(M)ds \pm \int_{AB} \varphi(M)ds.$$

მართებულია აგრეთვე შემდეგი

თეორემა 7.3.4. თუ $f(M)$ ფუნქციის პირველი გვარის წირითი ინტეგრალი არსებობს და $\left|f(M)\right| \le H$, $H = const$, მთელ Γ წირზე, მაშინ

$$\left|\int_{\Gamma} f(M)ds\right| \le HL,$$

სადაც L აღნიშნავს Γ წირის სიგრძეს.

თეორემა 7.3.5. თუ Γ წრფევადია და $f(M) = f(x,y,z)$ უწყვეტი ფუნქციაა Γ წირზე, მაშინ არსებობს $f(M)$ ფუნქციის პირველი გვარის წირითი ინტეგრალი Γ-ზე და ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობას

$$\int_{\Gamma} f(M)ds = \int_0^L f[x(s), y(s), z(s)]ds, \tag{7.3.3}$$

სადაც $x = x(s)$, $y = y(s)$, $z = z(s)-$ წირის ნატურალურ განტოლებებს წარმოადგენს (ე.ი. განტოლებებს, რომელშიაც პარამეტრად ცვლადი რკალის სიგრძეა მიღებული).

შეკრული კონტურის შემთხვევაში პირველი გვარის წირითი ინტეგრალი ჩაიწერება შემდეგნაირად

$$\oint_{\Gamma} f(M)ds \equiv \oint_{\Gamma} f(x,y,z)ds.$$

თეორემა 7.3.6. თუ Γ წირის განტოლება (7.3.1) სახითაა მოცემული, სადაც $x(t), y(t), z(t)$ უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციებია, მაშინ არსებობს Γ წირის გასწვრივ აღებული ყოველი უწყვეტი $f(M) = f(x,y,z)$ ფუნქციის პირველი გვარის წირითი ინტეგრალი და ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობას

$$\int_{\Gamma} f(M)ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)}dt.$$

განვიხილოთ $t = \alpha$ მნიშვნელობის შესაბამი A წერტილი და აღვნიშნოთ Γ წირზე, A-დან B-საკენ $(B = [x(\beta), y(\beta), z(\beta)])$ მოძრაობის დროს, წერტილთა შემდეგი მიმდევრობა:

$$A = M_0, M_1, M_2, ..., M_{n-1}, M_n = B. \tag{7.3.4}$$

ყოველ $M_k M_{k+1}$ $(k = 0,1,2,..,n-1)$ რკალზე ავიღოთ თითო $P_k \in M_k M_{k+1}$ წერტილი და შევადგინოთ შემდეგი სახის ჯამი

$$\sigma_1 = \sum_{k=0}^{n-1} f(P_k)(x_{k+1} - x_1),$$

სადაც x_k აღნიშნავს M_k წერტილის აბსცისს $(k = 0,1,2,..,n-1)$.

მივასწრაფოთ ახლა $n \to \infty$ ისე, რომ თითოეული შემადგენელი $M_k M_{k+1}$ რკალის დიამეტ-რიც მიისწრაფოდეს ნულისაკენ. თუ ასეთ პირობებში არსებობს σ_1 ჯამის გარკვეული ზღვარი, რომელიც არ არის დამოუკიდებელი როგორც წირის დაყოფის სპეციალურ წესზე, ისე P_k წერტილების შერჩევაზე, ვიტყვით, რომ არსებობს $f(M)$ ფუნქციის მეორე გვარის წირითი ინტეგრალი AB-ზე x-ით. ამ ზღვარს $f(M)$ ფუნქციის *მეორე გვარის წირითი ინტეგრალს* ვუწოდებთ AB წირზე x-ით და მას აღვნიშნავთ ასე:

$$\int_{AB} f(M)dx \quad \text{ან} \quad \int_{AB} f(x,y,z)dx.$$

აღსანიშნავია, რომ ამ განსაზღვრაში არსებითი მნიშვნელობა აქვს AB წირზე დაწესებულ მოძრაობის მიმართულებას. მართლაც, წერტილთა (7.3.4) მიმდევრობის ნაცვლად ჩვენ ახალი მიმდევრობა რომ აგველო, რომელიც დანომრილი იქნებოდა B–დან A–საკენ მოძრაობის შესაბამისად, ყოველი $x_{k+1} - x_k$ სხვაობა ნიშანს შეიცვლიდა. აქედან ადვილად დავასკვნით, რომ, თუ არსებობს $f(M)$ ფუნქციის მეორე გვარის წირითი ინტეგრალი x-ით AB წირზე, მაშინ არსებობს იგივე ფუნქციის მეორე გვარის წირითი ინტეგრალი x-ით BA (ე.ი. შებრუნებული მიმართულებით აღწერილი) წირზედაც და

$$\int_{AB} f(M)dx = -\int_{BA} f(M)dx.$$

ანალოგიურად განისაზღვრება *მეორე გვარის წირითი ინტეგრალები* y-ით და z-ით

$$\int_{AB} f(M)dy \qquad \text{ან} \qquad \int_{AB} f(M)dz.$$

ასე, მაგალითად, პირველი მათგანის განსაზღვრისას σ_1 ჯამში $(x_{k+1} - x_k)$ მამრავლების ნაცვლად უნდა ავიღოთ $(y_{k+1} - y_k)$ მამრავლი, სადაც y_k აღნიშნავს M_k წერტილის ორდინატს $(k = 0,1,2,..,n-1)$.ს

წარმოვიდგინოთ, რომ AB წირზე განსაზღვრულია წერტილის შემდეგი სამი ფუნქცია

$$P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ \ R(x,y,z).$$

ვიგულისხმოთ, რომ მეორე გვარის წირითი ინტეგრალები

$$\int_{AB} P(x,y,z)dx, \quad \int_{AB} Q(x,y,z)dy, \quad \int_{AB} R(x,y,z)dz$$

არსებობს. ასეთ შემთხვევაში ამ სამი ინტეგრალის ჯამი, ე. ი. *მეორე გვარის წირითი ინტეგრალი*, ჩვეულებრივ, შემდეგი სიმბოლოთი აღინიშნება:

$$\int_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

თუ წირი მოცემულია (7.3.1) განტოლებით, მაშინ

$$\int_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} [P(x(t),y(t),z(t))x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) + R(x(t),y(t),z(t))z'(t)]dt.$$

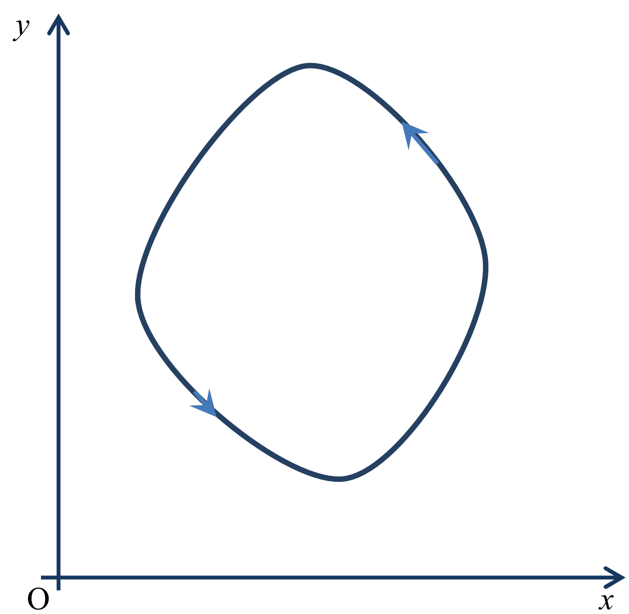
ჩვენ არ შევჩერდებით იმ მარტივ გარემოებაზე, რომ ასე განსაზღვრული წირითი ინტეგრალისთვის მართებულია ინტეგრალური აღრიცხვიდან ცნობილი ზოგიერთი ელემენტარული

თეორემა. აღვნიშნავთ მხოლოდ, რომ როგორც პირველი, ისე მეორე გვარის წირითი ინტეგრალი ადიტიურია, რაც იმას ნიშნავს, რომ, თუ რაიმე $f(M)$ ფუნქციის წირითი ინტეგრალი (პირველი ან მეორე გვარის) არსებობს $\Gamma = AB$ წირზე და თუ ეს წირი რაღაც შიგა C წერტილით გაყოფილია ორ ნაწილად AC და CB, მაშინ სამართლიანია შემდეგი ტოლობები:

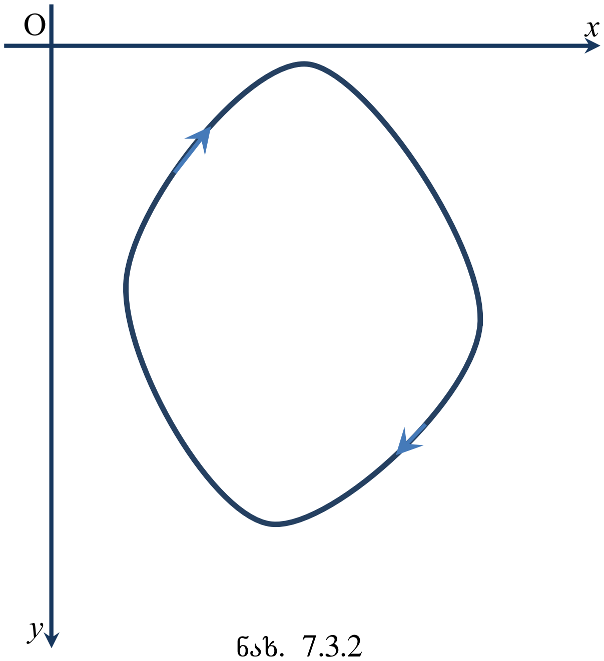
$$\int_{AB} f(M)dx = \int_{AC} f(M)ds + \int_{CB} f(M)ds,$$

$$\int_{AB} f(M)dx = \int_{AC} f(M)dx + \int_{CB} f(M)dx.$$

წირითი ინტეგრალების გამოყენებისას ხშირად ინტეგრება საჭირო ხდება არა ღია რკალის გასწვრივ, არამედ შეკრული კონტურის გასწვრივ. ამ შემთხვევაში, რამდენადაც საწყისი წერტილი ბოლო წერტილს ემთხვევა, ინტეგრალის აღების დროს სპეციალურად აღნიშნული უნდა იყოს ინტეგრების ორი შესაძლებელი მიმართულებიდან ის ერთ-ერთი მიმართულება, რომლის მიხედვითაც ინტეგრებას ვახდენთ. სივრცითი წირების შემთხვევაში ყოველთვის ასე იქცევიან. რაც შეეხება ბრტყელი შეკრული წირების შემთხვევაში (ამ შემთხვევაში ცხადია, შეკრული წირი გარკვეული ბრტყელი D არის შემომსაზღვრელი კონტურია), მიზანშეწონილია გარკვეულ შეთანხმებას მივაღწიოთ ინტეგრების მიმართულებათა თაობაზე. თუ ბრტყელი კოორდინატთა Oxy სისტემა მარჯვენაა (რაც იმას ნიშნავს, რომ Ox ღერძიდან Oy ღერძის მისაღებად საჭიროა პირველის $90°$-ით შემობრუნება საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით (იხ. ნახ. 7.3.1)), შეკრულ C კონტურზე მოძრაობის დადებით მიმართულებად "საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით" მოძრაობას იღებენ, რაც უფრო ზუსტად, იმას ნიშნავს, რომ C კონტურის დადებითი მიმართულებით შემოვლის დროს დამკვირვებელი, რომელიც ამ მიმართულებით მიჰყვება C კონტურს, ამ კონტურით შემოსაზღვრულ D არეს მარცხნივ ტოვებს (იხ. ნახ. 7.3.1). ასეთ შემთხვევაში ამბობენ, რომ Oxy სიბრტყეზე მოცემულია მარჯვენა ორიენტაცია. პირიქით, როცა კოორდინატთა Oxy სისტემა მარცხენაა (რაც იმას ნიშნავს, რომ Ox ღერძიდან Oy ღერძის მისაღებად პირველის შემობრუნება გვიხდება $90°$-ით საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით), შეკრულ C კონტურზე დადებითი მოძრაობის მიმართულებას "საათის ისრის მიმართულებით" მოძრაობას იღებენ, ე.ი. ისეთი მოძრაობის მიმართულებას, რომლის გასწვრივ მოძრავ დამკვირვებელს D არე მარჯვნივ რჩება (იხ. ნახ. 7.3.2). ამ მეორე შემთხვევაში ვამბობთ, რომ სიბრტყეზე მარცხენა ორიენტაციაა აღებული.



ნახ. 7.3.1



ნახ. 7.3.2

ყველა შემთხვევაში, ე.ი. როგორც მარჯვენა, ისე მარცხენა ორიენტაციის დროს, შეკრულ კონტურზე განსაზღვრული ინტეგრალისთვის ინტეგრების დადებით მიმართულებად წირის შემოვლის დადებითი მიმართულება იგულისხმება. ეს იმას ნიშნავს, რომ, თუ C ბრტყელი შეკრული კონტურია, მაშინ C კონტურის გასწვრივ

$$\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy \qquad (7.3.5)$$

გამოსახულება წარმოადგენს იმ მიმართულებით აღებულ ინტეგრალს, რომელიც შეესაბამება სიბრტყის ორიენტაციას (ე.ი. "საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით" მარჯვენა ორიენტაციის დროს, და შებრუნებით, როცა სისტემა მარცხენაა).

თუ რაიმე მოსაზრებით (7.3.5) ინტეგრალის განხილვა შებრუნებული მიმართულებით გვიხდება, ასეთ ინტეგრალს წინ "–" ნიშანი უნდა დავუწეროთ, ან ვწეროთ

$$\int_{C^-} P(x,y)dx + Q(x,y)dy,$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ ინტეგრება C-ზე უარყოფითი მიმართულებით ხდება.